Lista 5 - Probabilidade

Desigualdades e Convergência

Esperança

1 — Dadas variáveis aleatórias X e Z independentes, cada uma seguindo a distribuição normal padrão, Deixe $a, b \in \mathbb{R}$ (não ambos nulos), e deixe

$$Y = aX + bZ.$$

a) Calcule $\mathrm{Corr}(X, Y)$.
b) Mostre que $|\mathrm{Corr}(X, Y)| \leq 1$ nesse caso.
c) Dê condições necessárias e suficientes sobre os valores de a e b para que $\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$.
d) Dê condições necessárias e suficientes sobre os valores de a e b tais que para que $\mathrm{Corr}(X, Y) = -1$.

2 — Problema do Pareamento Suponha que n cavalheiros saem para jantar e deixem seus chapéus no vestiário. Após o jantar (e vários copos de vinho) eles escolhem seus chapéus completamente aleatoriamente. Denote por X o número de senhores que peguem seus próprios chapéus. Encontre $\mathbf{E}[X]$ e $\mathbf{Var}[X]$. (esse problema já apareceu numa forma ligeiramente diferente na Lista 2)

3 — Dada uma variável aleatória X, então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma variável aleatória limitada X_ϵ, tal que $\mathbf{P}(X \neq X_\epsilon) < \epsilon$

4 — Coletor de Cupom
Cada vez que se compra um saco de salgadinho, obtém-se como um bônus uma figurinha (escondida dentro da embalagem) de um jogador de futebol. Suponha que existam n imagens diferentes que são igualmente prováveis de estarem dentro de cada pacote.
Encontre o número esperado de pacotes que deve ser comprado para obter uma coleção completa de jogadores.

5 — Considere o espaço de probabilidade $\Omega = [-1/2, 1/2]$ com a medida normalizada de Lebesgue. Construa duas variáveis aleatórias X, Y em Ω que não são correlacionadas, mas não são independentes. (Sugestão: considere $X(x) = x$, $Y(x) = ax^2 + b$).

Desigualdades

6 — Uma moeda honesta é lançada de forma independente n vezes. Seja S_n o número de caras obtidas nesses n lançamentos. Use a desigualdade de Chebyshev para provar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| < \epsilon) = 1$$

para todo $\epsilon > 0$.

7 — Demonstração Probabilística do Teorema de Weierstrass
Utilize a desigualdade de Chebyshev para mostrar que para toda função continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^k \to f(x)$$

uniformemente em $x \in [0, 1]$ quando $n \to \infty$.
Dica: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes cada uma assumindo os valores 0 e 1 com probabilidade p e $1-p$ respectivamente. Seja $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ o número de caras em n lançamentos. Defina o polinômio $r_n(p) = \mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$ e estude a expressão $|r_n(p) - f(p)|$.

8 — Sharpness da desigualdade de Chebyshev
Para cada $t \geq 1$, construa uma variável aleatória X com média μ e variância σ^2, e tal que a desigualdade de Chebyshev se torna uma igualdade:

$$\mathbf{P}(|X-\mu| \geq t\sigma) = \frac{1}{t^2}.$$

9 — Deixe X ser uma variável aleatória não-negativa, tal que $\mathbf{E}X$ existe.

a) Mostre através de um exemplo que $\mathbf{E}(X^2)$ pode não existir.
b) Considere o truncamento $X_n = \min(X, n)$. Prove que para todo $p > 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\,\mathbf{E}(X_n^2) < \infty.$$

c) Prove a propriedade anterior para $p = 2$.

10 — Deixe $X_1, \ldots X_n$ serem variáveis aleatórias reais independentes e deixe $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Mostre que para $t > 0$ a desigualdade de Etemadi é válida:

$$\mathbf{P}\left[\max_k |S_k| \geq t\right] \leq 3\max_k \mathbf{P}\left[|Sk| \geq t/3\right].$$

Dica: Considere os conjuntos

$$A_j := \left\{\max_{1\leq k<j} |S_k| < 3r, |S_j| \geq 3r\right\}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

e observe que

$$\left\{\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq 3r\right\} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Modos de Convergência

11 — 12 — Suponha que $X_n \xrightarrow{r} X$ para $r \geq 1$. Mostre que $\mathbf{E}|X_n^r| \to \mathbf{E}|X^r|$.

13 — Suponha que $X_n \xrightarrow{D} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} c$, onde c é uma constante. Prove que $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$

14 — Prove o Teorema da Aplicação Contínua para $\xrightarrow{p}$:

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$$

15 — Deixe X_n ser uma sequência de variáveis aleatórias independentes que converge em probabilidade para X. Mostre que X é constante quase certamente.

16 — Prove que se $X_n \xrightarrow{2} X$ para $r \geq 1$. Mostre que $\mathbf{Var}[X_n] \to \mathbf{Var}[X]$.

17 — Convergência em probabilidade e convergência em L^p Mostre que a convergência em L^p implica convergência em Probabilidade para todos

$p > 0$. Mostre que o recíproca não é válida. (Prove por exemplo para $p = 1$).

18 — Considere as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ com funções de distribuição $F_1, F_2, \ldots$. Suponha que $X_n \to X$ em distribuição, e a função de distribuição F de X seja contínua. Prove que $F_n \to F$ na norma sup, i.e.

$$\|F_n - F\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0.$$

19 — Considere as variáveis aleatórias a valores inteiros $X_1, X_2, \ldots$, e uma variável aleatória X. Mostre que $X_n \to X$ na distribuição se e somente se

$$\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k) \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

20 — Considere variáveis aleatórias independentes $X_1, X_2, \ldots$ uniformemente distribuídas em $[0, 1]$, e deixe $Z_n = \max_{k \leq n} X_k$.

a) Prove que $Z_n \to 1$ em probabilidade.

b) Prove que $Z_n \to 1$ quase certamente.