Lista 6 - Probabilidade

Produtos e Convergência

Produto

Suponha que $E \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Dado $x \in \Omega_1$ definimos a x-seção $E^x \subset \Omega_2$ como

$$E^x = \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in E\}$$

1 — Se $E, F \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ e $x \in \Omega_1$, mostre que

a) $(E \cap F)^x = E_x \cap F_x$,

b) $(E^c)_x = (E_x)^c$,

c) $(\cup E_n)_x = \cup(E_n)^x$, onde (E_n) é uma sequência de subconjuntos $\Omega_1 \times \Omega_2$.

2 — Se μ_1 e μ_2 são medidas σ-finitas, mostre que a medida produto $m_1 \times m_2$ também é σ-finita.

3 — Mostre que $\mathcal{B}^{\mathbb{R}^d} = \bigotimes_{i=1}^{d} \mathcal{B}^{\mathbb{R}}$.

4 — Prove a existência da medida produto usando o Teorema da Extensão Compacta.

5 — Seja F uma distribuição em $\mathbb{R}$, então existe uma sequência de variáveis aleatórias independentes $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ com distribuição F.

6 — Suponha que X seja uma variável exponencialmente distribuída com densidade

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

e Y uma variável aleatória independente que tenha distribuição uniforme $U(0, 1)$. Encontre a densidade da soma $Z = X + Y$.

O seguinte exercício demonstra que a independência probabilística é análoga à independência linear:

7 — Deixe V ser um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo finito F e deixe X ser uma variável aleatória uniforme em V. Deixe $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to F$ ser uma forma bilinear não degenerada em V, e deixe $v_1, \ldots, v_n$ serem vetores não-nulos em V. Mostre que as variáveis aleatórias$\langle X, v_1 \rangle, \ldots, \langle X, v_n \rangle$ são independentes se e somente se os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes.

8 — Produto de variáveis aleatórias independentes

Deixe $X, Y > 0$ serem variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F e G.

a) Encontre a função de distribuição de XY.

b) Calcule a função de distribuição de XY se X e Y forem variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas em $[0, 1]$.

9 — Infinitas Moedas III

Use o Teorema de Kolmogorov para construir infinitas moedas honestas independentes. Ou seja, construa o espaço produto (X, A, μ) com $Y_i = \{0, 1\}$ com $i \in \mathbb{N}$. Logo X é o espaço das sequências tomando valores em $\{0, 1\}$. Defina a aplicação $\phi : X \to [0, 1]$ por

$$\phi(x) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{8} + \dots$$

Mostre que ϕ é mensurável, tem uma inversa mensurável sobre o complemento de um conjunto de medida 0 em $[0, 1]$ e que ϕ^{-1} mapeia conjuntos mensuráveis de $[0, 1]$ para conjuntos mensuráveis no espaço do produto X tendo a mesma medida.

Ou seja,

$$\mu\phi^{-1}(U) = m(U).$$

Nesse sentido, podemos dizer que a experiência de escolher um número aleatório entre 0 e 1 com a distribuição uniforme é equivalente à experiência (X, A, μ) que correspondente a uma sequência infinita de lançamentos independentes de moedas justas.

10 — Infinitas Moedas IV

Use o Teorema de Extensão de Bochner para construir infinitas moedas honestas independentes. Ou seja, construa o espaço produto (X, A, μ) com $Y_i = \{0, 1\}$ com $i \in \mathbb{N}$. Logo X é o espaço das sequências tomando valores em $[0, 1]$.

11 — Seja X uma variável aleatória não negativa. Prove que

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty \mathbf{P}(X(\omega) > x)\, dx.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_\Omega X d\mathbf{P} \\ &= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbf{1}_{(0,X(\omega)]}(x)\, dx\, d\mathbf{P}(\omega).\end{aligned}$$

e use Fubini.

12 — Prove que, para qualquer variável aleatória X e $a > 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(x < X < x + a)\, dx = a.$$

Dica: Use o anterior.

Convergência

13 — Realizamos o seguinte experimento aleatório. Colocamos $n \geq 10$ bolas azuis e n bolas vermelhas em uma bolsa. Nós escolhemos 10 bolas aleatoriamente (sem substituição) da bolsa. Deixe X_n ser o número de bolas azuis. Realizamos esse experimento para $n = 10, 11, 12, \cdots$. Prove que $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{Bin}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

14 — Deixe $X_1, X_2, X_3, \cdots$ ser uma sequência de variáveis aleatórias, de modo que

$$X_n \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1}$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante. Defina uma nova sequência Y_n como

$$Y_n = \frac{1}{n} X_n, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2}$$

Mostre que Y_n converge em distribuição para $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

15 — Deixe $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ e $\{Y_n, n = 1, 2, \cdots\}$ serem duas sequências de variáveis aleatórias, definidas no espaço amostral Ω . Suponha que

$$X_n \xrightarrow{p} X, \tag{3}$$

$$Y_n \xrightarrow{p} Y. \tag{4}$$

Prove que $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$.

16 — Considere a sequência $\{X_n, n = 1, 2, 3, \cdots\}$ tal que

$$X_n = \begin{cases} n & \text{com probabilidade } \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \frac{1}{n^2} \end{cases} \tag{5}$$

Mostre que

a) $X_n \xrightarrow{p} 0$.

b) $X_n \xrightarrow{L^r} 0$, para $r < 2$.

c) X_n não converge para 0 na r-média para qualquer $r \geq 2$.

d) $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$.

17 — Se uma sequência de variáveis aleatórias X_n converge em probabilidade para uma variável aleatória X, então X_n também converge em distribuição para X.

18 — Prove o Teorema de Representação de Skorokhod:

Suponha que $X_n \xrightarrow{d} X$. Então, existem variáveis aleatórias X'_n distribuídas de forma idêntica à X_n e uma variável aleatória X' distribuída de forma idêntica à X, e tal que

$$X'_n \xrightarrow{q.c.} X'$$

Dicas: Seja F_n a função de distribuição de X_n e F a função de distribuição de X. Suponha que $X_n \to X$ em distribuição. Seja

$$X'_n(\omega) = \inf\{\omega : F_n(x) \geq \omega\},$$

$$X'(\omega) = \inf\{\omega : F(x) \geq \omega\},$$

Prove que dado x um ponto de continuidade de F. Então $X'_n(x) \to X'(x)$

19 — Lema de Unicidade

Suponha que as variáveis aleatórias X_n convergem para alguma variável aleatória X em distribuição. Mostre que a distribuição de X é definida de forma única.
Dica: você pode usar o Teorema de Represenção de Skorokhod

20 — Suponha que $X_n \to X$ em distribuição e a_n sejam números reais tais que $a_n \to 0$ como $n \to \infty$. Mostre que $a_n X_n \to 0$ em distribuição.

21 — [**1.6pt**] Dadas variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$, i.i.d., com média comum $\mathbf{E}X_1 = 0$ e variância $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_1)$, defina $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e mostre que

a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$;

b) $\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$.

Dica:
Dado $M > 0$ primeiro note que

$$\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\} = \{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M \, i.v.\} = \limsup_{n\to\infty} \{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\}.$$