

Álgebra Linear Avançada

Representação Matricial dos Homomorfismos

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC



Representação Matricial dos Homomorfismos

Teorema

Suponha que V e W sejam espaços vetoriais tais que $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Se $\underline{x} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ for uma base de V e $\underline{y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ for uma base de W então o par $(\underline{x}, \underline{y})$ determina uma transformação linear

$$[\cdot]_{\underline{x}, \underline{y}} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

definida como $T \mapsto [T]_{\underline{x}, \underline{y}}$ onde $[T]_{\underline{x}, \underline{y}} = ([T(\mathbf{x}_1)]_{\underline{y}} \mid \dots \mid [T(\mathbf{x}_n)]_{\underline{y}})$ é a matriz cuja i -ésima coluna é o vetor $[T(\mathbf{x}_i)]_{\underline{y}}$. Além disso, o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ (\cdot)_{\underline{x}} \downarrow & & \downarrow (\cdot)_{\underline{y}} \\ \mathbb{K}_n & \xrightarrow{[T]_{\underline{x}, \underline{y}}} & \mathbb{K}_m \end{array}$$





Matriz da Transformação Linear

Definição (Matriz da Transformação Linear)

A matriz $[T]_{\underline{x}, \underline{y}}$ é denominada a **matriz da transformação linear** T em relação às bases $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{T} & W \\
 (\cdot)_{\underline{x}} \downarrow & & \downarrow (\cdot)_{\underline{y}} \\
 \mathbb{K}_n & \xrightarrow{[T]_{\underline{x}, \underline{y}}} & \mathbb{K}_n
 \end{array}$$

Como as setas verticais no diagrama e $[\cdot]_{\underline{x}, \underline{y}}$ são isomorfismos, $V, W, \text{Hom}(V, W)$ e T geralmente são identificados com $\mathbb{K}_n, \mathbb{K}_m, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $A = [T]_{\underline{x}, \underline{y}}$.

Assim, a distinção entre uma transformação linear e uma matriz é frequentemente obscurecida na literatura.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{K}_3[x]$ o espaço de todos os polinômios de grau menor igual a 3. O operador de diferenciação formal D mapeia V em V , pois a derivação diminui os graus dos polinômios. Seja $\underline{B} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, x, x^2, x^3)$ a base ordenada canônica de V . Então

$$Dp_1 = 0,$$

$$Dp_2 = 1,$$

$$Dp_3 = 2x,$$

$$Dp_4 = 3x^2,$$

$$Dp_1 = 0p_1 + 0p_2 + 0p_3 + 0p_4$$

$$Dp_2 = 1p_1 + 0p_2 + 0p_3 + 0p_4$$

$$Dp_3 = 0p_1 + 2p_2 + 0p_3 + 0p_4$$

$$Dp_4 = 0p_1 + 0p_2 + 3p_3 + 0p_4$$

e logo a matriz de D na base ordenada $\underline{B}$ é

$$[D]_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Corolário

Seja $\underline{v}$, $\underline{w}$ sejam bases para V e W , respectivamente. Seja $T, S \in \text{Hom}(V, W)$.
Então

$$\boxed{1} \quad [cT]_{\underline{v}, \underline{w}} = c[T]_{\underline{v}, \underline{w}}$$

$$\boxed{2} \quad [T + S]_{\underline{v}, \underline{w}} = [T]_{\underline{v}, \underline{w}} + [S]_{\underline{v}, \underline{w}}.$$

Sejam A uma matriz $m \times n$ com colunas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ e $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ um vetor

em $\mathbb{K}_n$. Então, o produto de A por $\mathbf{x}$ é

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Uma consequência imediata dessa representação é

Teorema

Seja V um espaço vetorial dimensional n com base $\underline{v}$, W um espaço vetorial dimensional com base $\underline{w}$ e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então, para um vetor arbitrário $v \in V$

$$[T(\mathbf{v})]_{\underline{vw}} = [T]_{\underline{v}, \underline{w}} [v]_{\underline{v}}.$$

Produto de Matrizes

Seja A uma matriz $m \times n$ com colunas $a_1, a_2, \dots, a_n$ e B a $p \times m$ matrix. Então, o produto de B e A é definido como a matriz $p \times n$ cuja coluna j^{th} é Ba_j . Portanto,

$$BA = (Ba_1 Ba_2 \dots Ba_n) .$$

Matriz da Composta

Teorema

Sejam V, W, X espaços vetoriais finito dimensionais com bases $\underline{v}, \underline{w}$ e $\underline{x}$ respectivamente e $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow X$ transformações lineares. Então

$$[S \circ T]_{\underline{v}, \underline{x}} = [S]_{\underline{w}, \underline{x}} [T]_{\underline{v}, \underline{w}}$$

Para esse fim, calculamos o vetor de coordenadas de $(S \circ T)(\mathbf{v}_j)$ em relação à base $\underline{x}$. Vamos definir $[T]_{\underline{v}, \underline{w}} = A$ e $[S]_{\underline{w}, \underline{x}} = B$. Pela definição de composição

$$(S \circ T)(\mathbf{v}_j) = S(T(\mathbf{v}_j)) .$$

Tomando vetores de coordenadas, obtemos

$$[(S \circ T)(\mathbf{v}_j)]_{\underline{x}} = [S(T(\mathbf{v}_j))]_{\underline{x}}.$$

Segue que

$$[S(T(\mathbf{v}_j))]_{\underline{x}} = B[T(\mathbf{v}_j)]_{\underline{w}}.$$

Pela definição de $[T]_{\underline{v}, \underline{w}}$, segue-se que

$$[T(\mathbf{v}_j)]_{\underline{w}} = a_j,$$

e, portanto, a j -ésima coluna de $[S \circ T](\underline{v}, \underline{x})$ é Ba_j .

Essa é a motivação para o produto de matrizes!!!

Mudança de Base

A representação matricial $[T]_{\underline{x}, \underline{y}}$ de T depende, é claro, das bases específicas $\underline{x}$ e $\underline{y}$ escolhidas. É fácil acompanhar como $[T]_{\underline{x}, \underline{y}}$ muda com $\underline{x}$ e $\underline{y}$

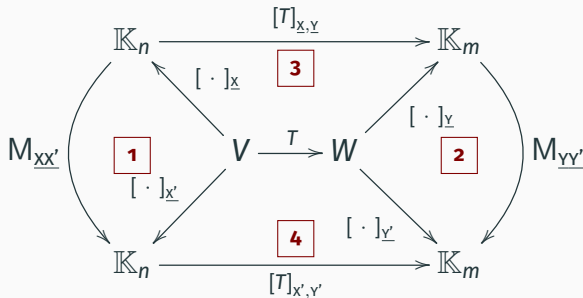
Teorema (Mudança de Base)

Seja V e W os espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ das dimensões n e m , respectivamente. Suponha que $\underline{x}$ e $\underline{x}'$ sejam duas bases de V e $\underline{y}$ e $\underline{y}'$ duas bases de W . Então, para cada $T \in \text{Hom}(V, W)$, temos

$$[T]_{\underline{x}', \underline{y}'} = M_{\underline{y} \underline{y}'} [T]_{\underline{x}, \underline{y}} M_{\underline{x} \underline{x}'}^{-1} \quad (1)$$

Já observamos que as matrizes de mudança de bases são invertíveis e, consequentemente, todos os termos da equação **1** fazem sentido.

Para ver que **1** é de fato verdadeira, considere o seguinte diagrama:



(2)

O diagrama 2 é composto de nossas partes, que rotulamos como 1, 2, 3, 4.

Logo os diagramas 1, 2 são comutativos.

Por resultados anteriores, os diagramas 3, 4 são comutativos. Segue-se que todo o diagrama 2 é comutativo. Em particular, $M_{\underline{Y}\underline{Y}'} [T]_{\underline{X}, \underline{Y}} = [T]_{\underline{X}', \underline{Y}'} M_{\underline{X}\underline{X}}$

Resolvendo esta equação para $[T]_{\underline{X}', \underline{Y}'}$ temos 1.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{K}_3[x]$ o espaço de todos os polinômios de grau menor igual a 3 e D o operador de diferenciação.

Sejam $\underline{B} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, x, x^2, x^3)$ e

$\underline{C} = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3)$ duas bases ordenadas de D .

Então

$$q_1 = p_1$$

$$q_2 = -1p_1 + p_2$$

$$q_3 = p_1 - 2p_2 + p_3$$

$$q_4 = -1p_1 + 3p_2 - 3p_3 + p_4.$$

Por um vídeo anterior temos que as matrizes de mudança de base são

$$M_{\underline{CB}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{\underline{BC}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$[D]_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de D na base ordenada $\underline{C}$ será

$$\begin{aligned}[D]_{\underline{C}} &= M_{\underline{BC}}[D]_{\underline{B}} M_{\underline{CB}} \\&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Logo D é representado pela mesma matriz nas bases ordenadas $\underline{B}$ e $\underline{C}$.

É claro que poderíamos ter visto isso diretamente, pois

$$Dg_1 = 0$$

$$Dg_2 = g_1$$

$$Dg_3 = 2g_2$$

$$Dg_4 = 3g_3.$$

Comentários Finais.