Lista 1

Funções de Uma Variavél

Limite I

1 — Prove a partir da definição de limite que:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x+6) = 9$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

d) $\lim\limits_{x\to 3} 4 = 4$

e) $\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 4$

f) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$

2 — Prove que a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ não possui limite quando $x \to 0$

3 — Calcule os seguintes Limites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$

b) $\lim\limits_{x\to -3} x^2 - 4$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \pi$

d) $\lim\limits_{x\to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

4 — Calcule os seguintes Limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^3}{x^3+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{3}{8-x^3}\right)$

e) $\lim\limits_{h\to 1} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2}{3x^3+x^2+x}$

5 — Calcule os seguintes limiites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$

6 — Ache os seguintes Limiites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(mx)}$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x+2}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\tan x}$

7 — Prove pela definição que as seguintes funções são contínuas nos pontos especificados:

a) $f(x) = x^4$ em $x = 1$

b) $f(x) = |x|$ em $x = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ em $x = 4$

d) $f(x) = 5x - 2$ em $x = 1$
Limites Laterais

8 — Calcule os limites laterais:

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ se } x \geq 1 \\ x^2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ se } x \geq 1 \\ x^2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

e) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ se } x \geq 2 \\ 6x^2 \text{ se } x < 12 \end{cases}$$

f) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3-1}$

g) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3-1}$

9 — Suponha que para todo x $|g(x)| \leq x^4$ Calcule $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

10 — Calcule os seguintes limites usando o teorema do confronto:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} 2^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

11 — Seja $f(x) = [\![x]\!]$ a função maior inteiro. Para que valores de a existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

12 — Existe um número a tal que o limite

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

existe? Caso afirmativo encontre a e o valor do limite.

13 — Seja $f(x) = x - [\![x]\!]$

a) Esboçe o gráfico de $f(x)$

b) Se n for um inteiro calcule:

$$\lim_{x \to n^-} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x \to n^+} f(x)$$

c) Para quais valores de a existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

14 — Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1 \text{ se } x \leq 3 \\ cx^2 - 1 \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

15 — Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c \text{ se } x < 4 \\ cx + 20 \text{ se } x \geq 4 \end{cases}$$

16 — Use o teorema do valor intermédiario para provar que existe uma raiz da equação no intervalo especificado:

a) $x^4 + x - 3 = 0 \quad (1,2)$

b) $\sqrt[3]{x} \quad (0,1)$

c) $\cos(x) = x \quad (0,1)$

d) $\ln x = e^- x \quad (1,2)$

17 — Use o teorema do valor intermediário para provar que existe um número c tal que $c^2 = 2$. (Ou seja, demonstre a existência de $\sqrt{2}$)

Respostas:

ex. 4 — a) 1 b) 0 c) 6 f) 0 g) 1/3

ex. 6 — a) 4 b)n/m c) $cos(a)$ e) $-1/\sqrt{2}$

ex. 9 — 0

ex. 12 — 15; -1.

ex. 14 — 1/3