# Lista $\zeta(2)$

## Taylor e Convergência Uniforme

**Exercício 1.** Exprima a solução geral de cada uma das equações seguintes como uma série de potências em torno de $x=0$

1. $y'' + y = 0$
2. $y''' - 3x\,y' - y = 0$
3. $(x^2+1)y'' - 8x\,y + 15y = 0$
4. $y''' + 3x^2 y'' - 2y = 0$

**Exercício 2.** Resolva o seguinte problema de valor incicial:

$$y'' + x\,y' - 2y = e; \\ y(0) = 0\text{e } y'(0) = 0$$

´(Dica: expanda $e^x$ em série de potências).

**Exercício 3.** Para as funções seguintes, determine o raio de convergência para as séries e se $f$ satisfaz as equações indicadas:

1. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n!)}$, $\quad \frac{d^4 y}{d\,x^4} = y$
2. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$, $\quad x\,y'' + y' - y = 0$
3. $f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}$, $y'' = x^{\alpha} y + b$ (ache $\alpha$ e $b$)

**Exercício 4.** Discuta a equação de Bessel de ordem $v$ com $v \in \mathbb{R}$.

$$x^2 y'' + x\,y' + (x^2 - v^2)y = 0$$

utilizando o método de Frobenius.

**Exercício 5.** Mostre que

$$y(x) = x^2 + x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4k+3)}$$

é solução de $2x^2 y'' + (x^3 - 3x)y' + 2y = 0$.

**Exercício 6.** Resolva a equação

1. $4x\,y'' + 2(1-x)y' - y = 0$
2. $x^2 y'' + x\,y' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$

**Exercício 7.** Considere a função $f(x) = x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$.

1. Mostre que $x = 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \ldots\right)$
2. Integrando termo a termo a série anterior obtemos
$$x^2 = 4\left(\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(k\,x)}{k^2}\right)$$
3. Integre novamente a série do item anterior a fim de calcular a soma:
$$S = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \ldots$$

**Exercício 8.** Calcule a série de Fourier para as seguintes funções:

1. $f(x) = \cosh(x)$
2. $f(x) = \begin{cases} -x \text{ para } -\pi < x < 0 \\ x \text{ para } 0 < x < \pi \end{cases}$
3. $f(x) = \frac{x^2}{4}$
4. $f(x) = \cos(\alpha x)$
5. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

**Exercício 9.** Use a série de Fourier de $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ para mostrar que

$$\zeta(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$