

# Lista 8

## Funções de Uma Variável

### Técnicas de Integração

1 —

a) Determine  $\alpha$  e  $\beta$  de modo que:

$$\operatorname{sen}(6x) \cos(4x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\beta x)).$$

Use que:  $\operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b))$

b) Calcule  $\int \operatorname{sen}(6x) \cos(4x) dx$

2 — Usando a técnica do exercício anterior calcule:

a)  $\int \operatorname{sen}(6x) \cos(x) dx$

b)  $\int \operatorname{sen}(x) \cos(6x) dx$

c)  $\int \operatorname{sen}(3x) \cos(2x) dx$

d)  $\int \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx$

3 — Usando que

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

calcule as seguintes integrais:

a)  $\int \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(5x) dx$

b)  $\int \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(7x) dx$

c)  $\int \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) dx$

4 — Usando que

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

calcule:

a)  $\int \cos(x) \cos(5x) dx$

b)  $\int \cos(x) \cos(7x) dx$

c)  $\int \cos(nx) \cos(mx) dx$

5 — Dados  $\alpha, \beta, m, n$  constantes, com  $\alpha \neq \beta$  mostre que existem  $A$  e  $B$  tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

6 — Usando o exercício anterior calcule as seguintes integrais:

a)  $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx$

b)  $\int \frac{x-1}{(x)(x-2)} dx$

c)  $\int \frac{x-1}{x^2-4} dx$

d)  $\int \frac{x-3}{x^2+3x+2} dx$

7 — Seja  $\alpha \neq 0$ . Mostre que:

$$\int \frac{1}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + k$$

Use esse fato para calcular as integrais:

a)  $\int \frac{1}{5+x^2} dx$

b)  $\int \frac{1}{3+4x^2} dx$

c)  $\int \frac{3x+1}{5+x^2} dx$

8 — Calcule as seguintes integrais:

a)  $\int \sqrt{1+x^2} dx$

b)  $\int \sqrt{1-4x^2} dx$

c)  $\int \sqrt{1-\cos(x)} dx$

d)  $\int \sqrt{3+4x^2} dx$

e)  $\int \sqrt{x^2+2x+2} dx$

9 — Calcule a área da elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

10 — Prove que Dados  $\alpha, \beta, m, n$  constantes mostre que existem  $A$  e  $B$  tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

11 — Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

a)  $\int \frac{1}{x^2-9} dx$

b)  $\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$

c)  $\int \frac{x+3}{(x-1)^2} dx$

d)  $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-2x+1} dx$

e)  $\int \frac{x^2+2}{x^2-4} dx$

f)  $\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} dx$

$$g) \int \frac{x^4 + x + 1}{x^3 - x} dx$$

Para calcular  $\int \sin^n(x) \cos^m(x) dx$  faça as seguintes transformações:

- Se  $n$  for ímpar faça  $u = \cos(x)$  observando que

$$\begin{aligned} & \int \sin^m(x) \cos^{2k+1}(x) dx \\ &= \int \sin^m(1 - \sin^2(x))^k \cos(x) dx \end{aligned}$$

Por fim faça a substituição  $u = \sin(x)$

- Se  $m$  for ímpar faça  $u = \sin(x)$

$$\begin{aligned} & \int \sin^{2k+1}(x) \cos^m(x) dx \\ &= \int \cos^m(1 - \cos^2(x))^k \sin(x) dx \end{aligned}$$

Por fim faça a substituição  $u = \cos(x)$

- Se  $n$  e  $m$  forem pares faça  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$  e use as fórmulas de recorrência.

**12** — Calcule:

- $\int \sin(x) \sin(8x) dx$
- $\int \sin^3(x) dx$
- $\int \cos^2(4x) dx$

$$d) \int \sin(x) \cos^4(5x) dx$$

$$e) \int \sin(2x) \cos^2(2x) dx$$

$$f) \int \sin^2(2x) \cos^2(2x) dx$$

$$g) \int \cos(x) \cos^2(4x) dx$$

**13** — Calcule as integrais usando substituição trigonométrica. Esboçe o triângulo retângulo associado

$$a) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx$$

$$b) \int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$c) \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$$

$$d) \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{4 - 9x^2} dx$$

$$e) \int x \sqrt{1 - x^4} dx$$

$$f) \int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

**Dicas** 8a)  $x = \operatorname{tg}(v)$  8b)  $x = \frac{1}{2} \sin(u)$  8c)  $\overline{\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}$  8d)  $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}(u)$   
 8e) Observe que  $x^2 + 2x + 2 = 1 + (x + 1)^2$   
 9a)  $x = \sec(\theta)$  9b)  $x = 3 \sin(\theta)$  9c)  $x = 3 \operatorname{tg}(\theta)$