Lista $\dfrac{1}{\sin(x)+\dfrac{1}{\cos(x)+\dfrac{1}{\sin(x)+\ldots}}}$

Taylor e Convergência Uniforme

Exercício 1. Calcule o polinômio de Taylor para as seguintes funções. Escreva as expressões para o erro. Faça os gráficos dos polinomios de Taylor de várias ordens e da função original (use um CAS).

a) $\sinh(x)$

b) cosh(7x)

c) $\tan(4x)$

d) a^x

e) $a^{x^{25}}$

f) $\frac{1}{1+x}$

g) $\log(1+x)$

h) $\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

i) $\cos^2(7x^{16})$

j) $\frac{x}{1+x-2x^2}$ $\quad(|x|<1/2)$

k) $(1+x)^\alpha$ com α real

Exercício 2. Mostre que

$$\arctan(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^2 k}{2k+1}+E_n(x)$$

com $\left|E_n(x)\right|\leqslant\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ se $0\leqslant x\leqslant 1$.

Exercício 3. Prove que

$$0.493948<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}\mathrm{dx}<0.493958$$

Exercício 4. Prove que

$$\int_0^1\frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}\mathrm{dx}<1+\frac{c}{31}\quad\text{com } 0\leqslant c\leqslant 1$$

Exercício 5. Seja $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ para $n=1$, $2,\ldots$ e x real, mostre que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{dx}\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{dx}$$

Exercício 6. Para cada série de potência abaixo determine os x para os quais as séries convergem e calcule as somas das séries. Dica: use as séries já calculadas

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)!}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$

Exercício 7. Enuncie o critério M de Weierstrass e utilize-o para verificar a convergência uniforme das seguintes séries nos conjuntos dados. Faça os gráficos da série para vários valores de n (use um CAS).

a) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots$ em $[a,b]$

b) $\dfrac{1}{\sin(x)+\dfrac{1}{\cos(x)+\dfrac{1}{\sin(x)+\ldots}}}$ em $\mathbb{R}$

c) $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos(nx)$ em $\mathbb{R}$

d) $\cos(x)+\mathrm{sen}(x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x)+\frac{1}{9}\cos(3x)+\ldots$ em $\mathbb{R}$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$ para $-1<x<1$

Exercício 8. a) Prove que $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}$.

b) A partir da identidade anterior mostre que $1+2x+3x^2+\ldots nx^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$.

c) A partir da identidade do item a) temos que $1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n=\frac{1}{1-x}$. Mostre a partir desse fato que

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\log(1+x)$$

d) Mostre a partir da primeira identidade que $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\arctan(x)$

Exercício 9. Mostre a partir das identidades derivadas no exercício anterior que:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\log\frac{1}{1-x}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n=\frac{1}{(1-x)^4}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{3}\log\frac{1+x}{1-x}$

Exercício 10. Se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ convergem uniformemente prove que $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente. Se além disso $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ são sequências de funções limitadas, prove que $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente em I.

Exercício 11. Considere a sequencia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$$

Para que valores de x a série converge absolutamente? Em que intervalos ela converge uniformemente? A função f é continua sempre que a série converge? É f limitada?