Lista 1/2

Reais, Séries e Sequências

Exercício 1. Prove que:

a) $-0=0$

b) $1^{-1}=1$

c) $-(a+b)=-a-b$

d) Se $a\neq 0$ e $b\neq 0$ então $(\mathrm{ab})^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

e) Se $a<b$ e $c>0$ então $\mathrm{ac}<\mathrm{bc}$

f) $1>0$

g) Se $a<c$ e $c<d$ então $a+b<c+d$

h) Se $a>0$ então $1/a>0$

i) Se $a<0$ então $1/a<0$

j) Se x tem a propriedade que $0\leqslant x<b$ para todo número real positivo b então $x=0$

k) Dados x,y números reais tais que $x<y$ prove que existe um racional z tal que $x<z<y$.

l) Prove que $x\in\mathbb{R}_+$ se e somente se $x>0$

Exercício 2. Prove que todo número real não-negativo possui uma raíz quadrada.

Exercício 3. Prove as seguites fórmulas por indução

a) $1+2+\cdots n=n(n+1)/2$

b) $1+3+5+(2n-1)=n^2$

Exercício 4. Dados $A,B\subset\mathbb{R}$ e seja $a=\sup A$ e $b=\sup B$. Qual é o sup de $A+B$? Sendo

$$A+B=\{a+b: a\in A \text{ e } b\in V\}.$$

Exercício 5. Dados $x,y\in\mathbb{R}$ com $x>0$ então existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $nx>y$.

Exercício 6. Calcule os seguintes limites a partir da definição

a) $\lim \frac{1}{n!}$

b) $\lim \frac{n}{n+1}$

c) $\lim n!$

d) $\lim n^2$

Exercício 7. Prove que se $\lim a_n=0$ então $\lim (a_n)^2=0$.

Exercício 8. Prove que o supremo do conjunto $A=(a,b)$ é b.

Exercício 9. Prove a partir da definição de limite que se $\lim a_n=A$ e $\lim b_n=B$ então $\lim (a_n+b_n)=A+B$.

Exercício 10. Prove a partir da definição de limite que se $\lim a_n=A$ então $\lim (ca_n)=cA$.

Exercício 11. Para as seguintes sequências calcule os seus 5 primeiros termos, determine se elas são acotadas superiormente e inferiormente, se são limitadas, crescentes ou decrescentes. E se existir, calcule os limites. Prove suas afirmações. (Nos itens d, m, n, o aclare o significado da sequência)

a) $a_n=1+\frac{1}{n}$

b) $a_n=\frac{n}{n^2+1}$

c) $a_n=(-1)^n n!$

d) $a_n=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\cdots}}}}}$, n vezes

e) $a_n=\cos(\frac{n\pi}{2})$

f) $a_n=na^n$ com $|a|<1$

g) $x_n=(1+\frac{2}{n})^n$

h) $x_n=1+(-1)^{n+1}$

i) $x_n=2^{\frac{1}{n}}$

j) $y_n=\frac{\log_a n}{n}$

k) $z_n=\frac{n^3+n^2+1}{n^2-12}$

l) $z_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

m) $z_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}}$, n vezes

n) $z_n=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$, n vezes

o) $z_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\cdots}}}}$ n vezes

Exercício 12. Prove por indução que:

a) $\sum_{i=1}^n a_i+\sum_{i=1}^n b_i=\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)$

b) $\sum_{i=1}^n (ca_i)=c\sum_{i=1}^n a_i$

Exercício 13. Mostre que:

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)(2n+1}=\frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{3^{n-1}}=3$

c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=1$

d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}=1$

e) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\log((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{\log(n^n)\log(n+1)^{n+1}}=\log_2\sqrt{e}$