Lista $\frac{1}{2+\frac{1}{4}}$

Testes de Convergência

Exercício 1. Para as seguintes séries calcule os seus 5 primeiros termos, determine se elas são acotadas superiormente e inferiormente, se são limitadas, crescentes ou decrescentes. E se existir, calcule os limites. Prove suas afirmações.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2''n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(\mathrm{nx})|}{n^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+2!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{n+1} e^{-\sqrt{x}}$

Exercício 2. Dado f uma função não negativa e crescente para todo $x > 1$. Use o método usado para demonstrar o teste da integral para mostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) < \int_1^n f(x)\,dx < \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

E tomando $f(x) = \log(x)$ deduza as desigualdades

$$en^n e^{-n} < n! < en^{n+1} e^{-n}$$

Essas desigualdades fornecem a seguinte estimativa grosseira para o crescimento de $n!$

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e} < \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} < \frac{e^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}}{e}$$

De onde podemos concluir que:

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \to \frac{1}{e}.$$

Exercício 3. Teste as seguintes séries para convergência ou divergencia.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1;n}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - e^{-n^2})$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n|\sin(nx)|$ com $r > 0$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}.$

m) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots$

n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

o) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

q) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$

r) $1 - \frac{2!}{1\cdot 3} + \frac{3!}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{4!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots$

s) $\frac{1}{3} - \frac{1\cdot 4}{3\cdot 5} + \ldots \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}$

t) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{arctg}(n)}{n^3}$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\mathrm{arctg}(n))^n}$

Exercício 4. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente então

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Exercício 5. Para que valores de p a série converge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))^p}$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

Exercício 6. Estime as séries com o erro pedido

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ com precisão de 0,01

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ com precisão de 0,01

Exercício 7. Mostre que se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} n a_n \neq 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exercício 8. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$ converge para todo x. Conclua daí que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$

Exercício 9. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série com termos positivos e seja $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} r_n = R < 1$, e assim converge pelo teste da razão. Seja $R_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ o resto depois de k-termos.

a) Se r_n for uma sêquencia decrescente e $r_{n+1} < 1$. Mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-r_{n+1}}$$

b) Se r_n for uma sêquencia crescente mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-L}$$

c) Calcule a soma parcial s_5 da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Estime o erro cometido nessa aproximação.

d) Calcule o valor de k tal que s_k aproxima a série com precisão 0,00005.

Exercício 10. Seja a_n e b_n duas sequências positivase seja $c_n = b_n - \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n}$ Prove que:

a) Se existe uma constante positiva r tal que $c_n > r > 0$ para todo $n > N$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. [Dica: Mostre que $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < a_N b_N / r$]

b) Se $c_n < 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ diverge então somatório de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. [Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ domina $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$].

Exercício 11. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Prove o teste de Raabe.

Se existe um $r > 0$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n} \text{ para todo } n > N$$

Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 - \frac{1}{n} \text{ para todo } n > N$$

[dica: use o exercício anterior com b_{n+1}=n]

Exercício 12. Encontre os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln(n)}$ converge.

Exercício 13. Prove detalhadamente o teste da raíz.