Lista 0

Conjuntos e Funções e Relações

Exercício 1. Sejam A, B, C conjuntos. Prove as seguintes afirmações

a) $A \cap A = A$

b) $A \cup A = A$

c) $A \cap B \subset B$

d) $A \subset A \cup B$

e) $A \cap B \in A \cup B$

f) $A \cup \emptyset = A$

g) $A \cap \emptyset = \emptyset$

h) $A \cup (A \cap B) = A$

i) $B - (B - A) = A \cap B$

j) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

k) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

l) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

Exercício 2. Dados A, B, C, D conjuntos. Prove as seguintes afirmações:

a) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$

b) Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $A \cup C \subset B \cup D$.

c) $(A^C)^C = A$

d) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

e) $A \subset B^C$ se e somente se $A \cap B = \emptyset$

f) Se $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ então $A = B$.

g) $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$.

h) $A \subset B$ se e somente se $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

i) Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$ então $A = B$

j) $A - B \subset B$ se e somente se $A - B = \emptyset$

k) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

Exercício 3. Prove ou dê um contra-exemplo

a) Se $B \subset C$ então $A \times B \subset A \times C$

b) Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $A \times C \subset B \times D$

c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

e) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

f) Se $A \cap B = \emptyset$ então $(A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$

g) Se $A \times B \subset A \times C$ então $B \subset C$

Exercício 4. Dado uma função f: $A \longrightarrow B$ e X, $Y \subset A$ e $Z, W \subset B$. Prove que:

a) Se $X \subset Y$ então $\mathrm{Im}\, f(X) \subset \mathrm{Im}\, f(Y)$.

b) $\mathrm{Im}\, f(X \cup Y) = \mathrm{Im}\, f(X) \cup \mathrm{Im}\, f(Y)$.

c) Se f é injetora então $\mathrm{Im}\ f(X \cap Y) = \mathrm{Im}\, f(X) \cap \mathrm{Im}\, f(Y)$. Mostre que a igualdade é falsa sem a hipótese de f injetora.

d) Se $Z \subset W$ então $f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(W)$

e) $X \subset f^{-1}(f(X))$

f) Se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(Z)) = Z$

Exercício 5. Dado um conjunto não vazio A. Mostre que:

a) Se $R =$ AxA, então R é reflexiva, simétrica, transitiva e completa.

b) Se $R = \varnothing$ então R é simétrica, transitiva assimétrica, antissimétrica.

c) Se $R = \{(a, a) | a \epsilon A\}$ então R é uma relação de equivalência e antisimétrica.

Exercício 6. Prove ou forneça contraexemplos:

a) R é completa $\Rightarrow$ R é reflexiva

b) R transitiva e irreflexiva $\Rightarrow$ R é antisimétrica

c) R é reflexiva $\Rightarrow$ R não é antisimétrica

d) R é assimétrica $\Rightarrow$ R não é transitiva

e) R é uma ordem parcial $\Rightarrow$ R é antisimétrica e assimétrica

Exercício 7. Dê exemplos se possível de relações R que são

a) Reflexivas e Simétricas mas não transitivas

b) Simétricas e transitiva, mas não reflexivas

c) Simétricas e antisimétrica

Exercício 8. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos conjuntos naturais e $m\epsilon\mathbb{N}$. Definimos a seguinte relação

$$R \equiv \{(x,y): m|(x-y\}.$$

Neste caso escrevemos $x \equiv y (\mathrm{mod}\ m)$, x é congruente a y modulo m.

1. Ache $[3]_3\,[2]_3\,[5]_3$

2. Ache duas soluções das seguintes equações:

   a) $x \equiv 3 (\mathrm{mod}\,14)$

   b) $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\,7)$

   c) $x^2 \equiv 3 (\mathrm{mod}\,7)$

3. Dado $m\epsilon\mathbb{N}$. Mostre que $x,\ y,\ z\epsilon\mathbb{Z}$, $x \equiv y (\mathrm{mod}\ m)$ então $x + z \equiv y + z (\mathrm{mod}\ m)$ e $\mathrm{xz} \equiv \mathrm{yz}\,(\mathrm{mod}\,m)$.

Exercício 9. Dados A, B, C conjuntos e R uma relação entre A e B e S uma relação entre B e C. Então

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

Exercício 10. Dado Π uma partição de um conjunto não vazio A. Então A/Π é uma relação de equivalência em A.

Exercício 11. Dado R uma relação de equivalência em A. Mostre que $A/[A]_R = R$.

Exercício 12. Dado $Q = (a, b)$ com $a, b\epsilon\mathbb{Z}$. Definimos a relação R em Q por

$$(a,b)R(c,d) \text{ see } ad = cb$$

1. Mostre que R é uma relação de equivalência.

2. Ache três elementos em $[(1,3)]_R$

3. Mostre que $\forall n\epsilon\mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $[(x,\ y)]_R = [(nx,\ ny]_R$.

4. Seja $\square$ a operação binária em $[Q]_R$ definida por:

   $$[(x,y)]_R \square [(m,n)]_R = [(\mathrm{xm}, \mathrm{yn})]_R$$

   Mostre que a operação está bem definida, i.e., se $[(x,y)]_R = [(z,w)]_R$ e $[(m,n)]_R = [(p, q)]_R$ então

   $$[(x,y)]_R \square [(m,n)]_R = (z,w)]_R \square [(p,q)]_R.$$

5. Desta vez tentamos definir uma relação binária $\oplus$ em $[Q]_R$ por:

   $$[(x,y)]_R \oplus [(m,n)]_R = [(x+m, y+n)]_R$$

   Mostre que $\oplus$ não está bem definida, ou seja não é realmente uma operação binária em $[Q]_R$

6. Seja $\boxplus$ a operação binária em $[Q]_R$ definida por:

   $$[(x,y)]_R \boxplus [(m,n)]_R = [(xn + ym, \mathrm{yn})]_R$$

   Mostre que a operação está bem definida.

7. O que é Q?