

Universidade Federal do ABC  
Bacharelado em Ciência e Tecnologia & Bacharelado em Ciências e Humanidades

Bacharelado e Licenciatura em Matemática

## Evolução dos Conceitos Matemáticos - BC1438

professor Roque Caiero

segundo quadrimestre, 2012  
setembro-outubro, 2012, reposição

### ***Elementos*** de Euclides

T.L. Heath. *The thirteen books of Elements's Euclides*. Mineola (New York), Dover, 2.ed., 1956.  
I. Bicudo. *Os elementos*. São Paulo, UNESP, 2009.

## Axiomática

### Livro I

#### Definições

D-I.1. Um ponto é aquilo que não tem parte.

D-I.2. Uma linha é comprimento [ou extensão] sem largura [ou amplitude].

D-I.3. As extremidades de uma linha são pontos.

D-I.4. Uma linha reta é uma linha que se estende ilimitadamente [indefinidamente], está posta por igual com os pontos sobre si própria.

D-I.5. Uma superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

D-I.6. As extremidades de uma superfície são linhas [retas].

D-I.7. Uma superfície plana é uma superfície que se estende [ou está posta] por igual [ou uniformemente] com as linhas retas sobre si própria.

D-I.8. Um ângulo plano é a inclinação entre duas linhas em um plano, se as linhas encontram-se e não se mantêm em [não postas sobre] uma linha reta.

D-I.9. Quando as linhas contendo o ângulo são retas, o ângulo é chamado um ângulo retilíneo [ou retilinear].

D-I.10. Quando uma linha reta vertical, sobre uma linha reta, faz os ângulos adjacentes iguais um a outro, cada um dos ângulos iguais é chamado um ângulo reto, e a linha reta vertical sobre a outra é chamada perpendicular relativa àquela com a qual se encontra.

D-I.11. Um ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

D-I.12. Um ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

D-I.13. Uma fronteira é aquilo que é uma extremidade de qualquer coisa.

D-I.14. Uma figura é aquilo que está contido por alguma fronteira ou algumas fronteiras.

D-I.15. Um círculo é uma figura plana contida por uma linha [chamada circunferência], tal que todas as linhas retas que se encontram nela a partir de um ponto entre aqueles no interior da figura são iguais uma a outra.

D-I.16. E o ponto particular é chamado o centro do círculo.

D-I.17. Um diâmetro de um círculo é qualquer linha reta desenhada através do centro e terminada em ambas as direções pela circunferência do círculo; tal linha reta secciona em duas partes iguais o círculo.

D-I.18. Um semicírculo é a figura contida por um diâmetro e pela circunferência cortada pelo diâmetro. O centro de um semicírculo é o mesmo que aquele do círculo.

D-I.19. Figuras retilíneas [retilineares] são aquelas que são contidas por linhas retas, figuras triláteras [trilaterais] são aquelas contidas por três, quadriláteras [quadrilaterais] são aquelas contidas por quatro e multiláteras [multilaterais] são aquelas contidas por mais que quatro linhas retas.

D-I.20. Das figuras trilaterais, um triângulo eqüilateral é uma figura trilateral que tem seus três lados iguais, um triângulo isósceles tem dois de seus três lados iguais e um triângulo escaleno tem seus três lados desiguais.

D-I.21. Das figuras trilaterais, um triângulo de ângulo reto [retângulo] é uma figura trilateral que tem um ângulo reto, um triângulo obtuso [obtusângulo] tem um ângulo obtuso e um triângulo de ângulo agudo [acutângulo] tem seus três ângulos agudos.

D-I.22. Das figuras quadrilaterais [quadriláteras], um quadrado é uma figura quadrilateral que é simultaneamente eqüilateral e de ângulo reto [retangular]; um oblongo é de ângulo reto mas não eqüilateral; um losango [rombo] é eqüilateral mas não de ângulo reto; e um rombóide tem seus lados e ângulos opostos iguais um a outro, mas não é eqüilateral e tampouco de ângulo reto; outras figuras quadriláteras que não estas são chamadas trapézios.

D-I.23. Linhas retas paralelas são linhas retas, estando no mesmo plano e sendo prolongadas ilimitadamente [indefinitamente] em ambas as direções, que não encontram uma a outra em qualquer direção.

## Postulados

P-I.1. Uma linha reta pode ser traçada [prolongada] a partir de qualquer ponto para qualquer outro ponto.

P-I.2. Uma linha reta finita pode ser prolongada continuamente [indefinitamente] sobre [em] uma linha reta.

P-I.3. Um círculo pode ser descrito com qualquer centro e qualquer distância.

P-I.4. Todos os ângulos retos são iguais um ao outro [iguais entre si].

P-I.5. Caso uma linha reta intercepta [caindo sobre] duas linhas retas, formando ângulos internos [ou interiores] de um mesmo lado e conjuntamente menores que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se prolongadas ilimitadamente [indefinitamente], encontram-se sobre aquele lado no qual os ângulos são conjuntamente menores que dois ângulos retos.

## Axiomas (ou noções comuns)

A-I.1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são também iguais entre si.

A-I.2. Se coisas iguais são adicionadas a coisas iguais, os todos são iguais.

A-I.3. Se coisas iguais são subtraídas a partir de coisas iguais, as restantes são iguais.

A-I.4. Coisas que coincidem [que se ajustam] uma com a outra são iguais uma com a outra [entre si].

A-I.5. O todo é maior que a parte.

## Livro V

### Definições

D-V.1. Uma magnitude [ou grandeza] é uma parte de uma magnitude [ou grandeza], a menor da maior, quando se mede a maior.

D-V.2. A maior é um múltiplo da menor quando a maior é exatamente medida por meio da menor.

D-V.3. Uma razão é uma espécie de relação a respeito do tamanho entre duas magnitudes [ou grandezas] do mesmo gênero [ou mesma espécie].

D-V.4. Diz-se que têm uma razão, as magnitudes [ou grandezas], que se excedem uma a outra quando multiplicadas [que quando multiplicadas, excedem uma a outra].

D-V.5. Diz-se que magnitudes [ou grandezas] estão na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta e, quando dados quaisquer eqüimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer eqüimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros eqüimúltiplos ou simultaneamente excedem, ou são simultaneamente iguais, ou são simultaneamente menores que os últimos [mesmos múltiplos da segunda e da quarta], tomados correspondentes.

D-V.6. Magnitudes [ou grandezas] que têm a mesma razão dizem-se proporcionais [em proporção].

D-V.7. Quando, dos eqüimúltiplos [dos mesmos múltiplos], o múltiplo da primeira magnitude [ou grandeza] excede o múltiplo da segunda, mas o múltiplo da terceira não excede o múltiplo da quarta, diz-se que a primeira tem uma razão maior para a segunda que a terceira para a quarta.

## Livro VI

### Definições

D-VI.1. Figuras retilíneas semelhantes são figuras retilíneas que têm os ângulos iguais, um a um, e os lados ao redor dos ângulos iguais em proporção.

D-VI.2. Uma linha reta diz-se estar seccionada [cortada] em extrema e média razão quando a linha reta toda esteja para o maior segmento como o maior segmento esteja para o menor segmento.

D-VI.3. Uma altura de uma figura qualquer é a linha reta perpendicular traçada [prolongada] do vértice à linha reta base da figura.

## Livro VII

### Definições

D-VII.1. Uma unidade é aquilo em virtude do qual cada uma das coisas que existe é chamada uma.

D-VII.2. Um número é a quantidade [multitude, um múltiplo] composta de unidades.

D-VII.3. Um número é uma parte [ou submúltiplo] de um número, o menor do maior, quando é exatamente medido pelo maior;

D-VII.4. E partes [fração própria] quando não o mede exatamente.

D-VII.5. O maior número é um múltiplo do menor número quando é [exatamente] medido pelo menor.

D-VII.6. Um número par é aquele divisível em duas partes iguais.

D-VII.7. Um número ímpar é aquele não divisível em duas partes iguais, ou um número que difere por uma unidade de um número par.

D-VII.8. Um número par de vezes um número par é aquele que é medido por um número par, de acordo com um número par.

D-VII.9. Um número par de vezes um número ímpar é aquele que é medido por um número par, de acordo com um número ímpar.

D-VII.10. Um número ímpar de vezes um ímpar é aquele que é medido por um número ímpar, de acordo com um número ímpar.

D-VII.11. Um número primo é aquele que é medido por uma única unidade [uma unidade só].

D-VII.12. Números primos entre si são aqueles que são medidos por uma única unidade como uma medida comum.

D-VII.13. Um número composto é aquele que é medido por algum número [distinto].

D-VII.14. Números compostos um para outro [entre si] são aqueles que são medidos por algum número como uma medida comum.

D-VII.15. Um número é dito multiplicar um número quando aquele multiplicado é adicionado a si próprio tantas vezes quantas são as unidades no outro número, e então algum número é obtido.

[...]

D-VII.18. Um número quadrado é o número igual ao mesmo número multiplicado pelo próprio número [o mesmo número igual de vezes] ou o número contido por dois números iguais.

[...]

D-VII.20. Números estão em proporção quando o mesmo múltiplo, o primeiro do segundo e o terceiro do quarto, ou a mesma parte ou as mesmas partes.

[...]

D-VII.22. Um número diz-se perfeito quando é igual às suas próprias partes.

## Livro X

### Definições

D-X.1. Magnitudes [grandezas] dizem-se comensuráveis quando são medidas pela própria medida [mesma medida]; e dizem-se incomensuráveis aquelas magnitudes das quais não há medida comum.

D-X.2. Linhas retas são comensuráveis em potência quando os quadrados sobre as linhas retas são medidos por meio da mesma área; e são incomensuráveis quando os quadrados sobre as linhas retas não há alguma área comum.

D-X.3. Supõem-se estas coisas, provam-se que existem linhas retas, ilimitadas em quantidade, aquelas comensuráveis e também aquelas incomensuráveis com a linha reta proposta, umas somente em comprimento e outras também em potência. Chama-se de fato racional a linha reta proposta, e as linhas retas comensuráveis com esta, seja em comprimento ou seja em potência, racionais; e aquelas incomensuráveis com esta linha reta são chamadas irracionais.