UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 1 - Funções de Variáveis Complexas

Números Complexos

1 — Expresse os seguintes números complexos na forma $x + yi$

a) $(-1+3i)^{-1}$
b) $(1+i)(1-i)$
c) $(7+7\pi i)(\pi + i)$
d) $(i+1)(i-2)(i+3)$
e) $\dfrac{1+i}{i}$
f) $\dfrac{i}{3-i}$

2 — Mostre que:

a) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$
b) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.
c) $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$
d) $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
e) $\overline{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}$
f) $\left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right| \leq \frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}$

3 — Encontre a parte real e imaginária de $(1+i)^{70}$

4 — Prove que:

a) $\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}(z_i)$
b) $\operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(z_i)$

5 — Prove que

$$\left|\frac{a+b}{1+a\overline{b}}\right| = 1$$

se e somente se $|a| = 1$ ou $|b| = 1$

6 — a) Mostre que o conjunto:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

munido com as operações usuais de soma e multiplicação de matrizes é um corpo.

b) Mostre que $\mathbb{C}$ e $\mathcal{C}$ são isomorfos como corpos.
c) Qual é a operação de conjugação em $\mathcal{C}$?

7 — Mostre que os complexos não são ordenáveis. (Dica: suponha que fosse então $i > 0$ ou $i < 0$ então...)

8 — Mostre que

a) $\operatorname{Arg} zw = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$
b) $\arg \overline{z} = -\arg z$

9 — Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ com $|c|^2 - ab > 0$. Mostre que a equação

$$az\overline{z} + \overline{c}z + c\overline{z} + b = 0$$

descreve uma linha ou um círculo no plano complexo.

10 — Mostre que

a) $|z| \leq |z-w| + |w|$
b) $|z| - |w| \leq |z-w|$
c) $|z| - |w| \leq |z+w|$
d) $\sqrt{2}\,|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

11 — Descreva geometricamente os conjuntos de pontos z que satisfazem:

a) $|z - i + 2| = 4$
b) $|z - i + 2| \leq 4$
c) $|z - i + 2| > 4$
d) $\operatorname{Im} z > 0$
e) $\operatorname{Im}(z - 4i + 2) > 0$

f) $\operatorname{Im} z + 1 > 0$

g) $\operatorname{Im} z = 1$

h) $|\mathrm{Re} z| < |z|$

i) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$

12 — Para os conjuntos do exercício anterior determine quais são abertos, fechados.

13 — Descreva os seguintes números complexos na sua forma polar:

a) $i + 1$

b) $-6i$

c) $-1 - i$

14 — Mostre que:

a) $\left|e^{i\theta}\right| = 1$

b) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

c) se $z = re^{i\theta}$ mostre que $z^m = r^m e^{mi\theta}$

15 — Prove que dois números complexos possuem o mesmo módulo se e somente se existem c_1, c_2 tais que $z_1 = c_1 c_2$ e $z_2 = c_1 \overline{c_2}$

16 — Prove que a equação $z^n = 1$ tem exatamente n soluções complexas e desenhe-as todos no plano complexo.

17 —

a) Descreva todos os números complexos tais que $e^z = 1$

b) Dado que $e^\alpha = w$ Descreva todos os números complexos tais que $e^z = w$

c) Descreva todos os z tais que $e^z = e^w$

18 — Dados $a, b \in \mathbb{C}$ prove o *Teorema Binomial* : para cada $n \in \mathbb{N}^*$, vale a expressão

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) a^{n-i} b^i$$

19 —

a) Prove que:

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n-1}}{1 - z}$$

b) Use a expressão anterior para deduzir a identidade de Lagrange:

$$1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left((2n + 1\theta/2\right)}{2\sin(\theta/2)}$$

20 —

a) Use a fórmula binomial e a identidade de de Moivre para mostrar que:

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta (i \sin\theta)^k$$

Defina m como:

$$m = \begin{cases} n/2 & n \text{ par} \\ (n-1)/2 & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

e usando a expressão anterior mostre que

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta \qquad \text{para } n = 1,$$

b) Dado $-1 \le x \le 1$. Use $x = \cos\theta$ com $0 \le \theta \le \pi$ para provar que a função

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

é um polinômio de grau n na variável x.