UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 2 - Funções de Variáveis Complexas

Limites e Derivadas de Funções Complexas

1 — Calcule:

a) $(1+i)^n$

b) $8^{1/6}$

c) $(1+i\sqrt{3})^{-10}$

d) $(-1)^{1/5}$

2 — Dados $\{z_0, \ldots, z_{n-1}$ as raízes de $z^n = a$. Dado $m \in \mathbb{N}$, calcule

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^m$$

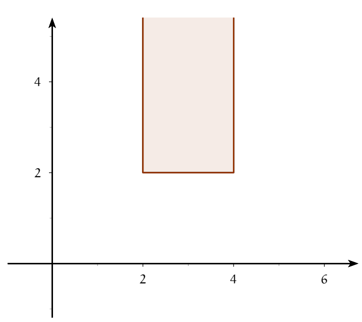
3 — Dado a função $f(z) = \frac{1}{z}$. Determine e descreva:

a) a imagem dos círculos centrados na origem de raio r por $f(z)$

b) a imagem dos raios passando pela origem pela ação de $f(z)$

c) a imagem das retas horizontais e verticais passando pela origem.

d) a imagem da região abaixo pela ação da função $f(z) = \frac{1}{z}$



4 — Determine a imagem da região anterior pela ação da função $f(z) = z^2$.

5 — Mostre pela definição os seguintes limites:

a) $\lim_{z \to z_0} c = c$.

b) $\lim_{z \to z_0} \overline{z} = \overline{z}_0$.

c) $\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}^2}{z} = 0$.

6 — Suponha que exista M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z numa vizinhança de z_0 e que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = 0.$$

Mostre que

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = 0$$

7 — Suponha que existam os limites $\lim_{z \to z_0} f(z)$ e $\lim_{z \to z_0} g(z)$, Mostre que:

a) $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z)$

b) Suponha que $\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$ então $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)}$

8 — Mostre que os polinômios $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ são funções contínuas.

9 — Mostre rigorosamente que se $f(z)$ e $g(w)$ são funções contínuas em z e $w = f(z)$ respectivamente então $g(f(z))$ é contínua em z.

10 — Projeção Estereográfica

a) Determine as expressões para a projeção estereográfica $\phi : S \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$.

b) Mostre que a projeção estereográfica $\phi : S \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ é uma bijeção.

c) Mostre que existe uma bijeção entre os círculos da esfera de Riemann e as retas e círculos do plano.

d) Seja C um círculo na esfera de Riemann. Então, $\phi(C\ (0,0,1))$ é um círculo no plano se e somente se $(0,0,1) \in C$e é uma linha em contrário.

11 — Mostre que a função $f : \overline{C} \to \overline{C}$ definida como:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ \infty & \text{se } z = 0 \\ 0 & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

é contínua em todos os pontos.

12 — Usando as propriedades de limite no infinito, prove que:

a) $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z^2+1} = 0$

b) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty$

13 — Dado a função $f(z) = e^x e^{iy}$ mostre que:

a) Mostre que se $w_0 \neq 0$, existe um número infinito de pontos z em cada vizinhança de ∞ tal que $f(z) = w_0$.

b) Mostre que $\lim\limits_{z\to\infty}$ não existe.

14 — Calcule as seguintes derivadas:

a) $\dfrac{(1+z^2)^4}{z}$

b) $\dfrac{1}{z}$

c) $(1-4z^2)^3$

15 — Mostre que as seguintes funções são diferenciáveis utilizando as equações de Cauchy-Riemann

a) $iz+2$

b) z^2

c) z^3

d) $\cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$

16 — Deduza as equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares.

17 — Determine os pontos nos quais $f'(z)$ existe e ache seus valores:

a) $f(z) = z\mathrm{Im}\, z$

b) $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ para $r > 0, -\pi < \theta < \pi$

c) $f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln(r)) + ie^{-\theta}\sin(\ln(r))$

18 — Mostre que a função $f(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ não é diferenciável em nenhum ponto.

19 — Mostre que a função $f(z) = \overline{z}$ não é diferenciável em nenhum ponto.

20 — Mostre que a função

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}^2}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

não é diferenciável no 0.

21 — Mostre que uma função analítica tal que seu valor absoluto é constante é uma função constante.

22 — Mostre que $f(z)$ e $\overline{f(\overline{z})}$ são simultaneamente analíticas.

23 — Mostre que uma função harmônica satisfaz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$$

24 — Suponha que f e g sejam diferenciáveis em z. Mostre que:

a) $(cf(z))' = cf'(z)$

b) $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$

c) $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

d) Suponha que $g(z) \neq 0$, então

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

25 — Mostre rigorosamente que se $g(w)$ e $f(z)$ são funções analíticas então $g(f(z))$ também é analítica.