UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 3 - Funções de Variáveis Complexas

Séries

Teorema de Lucas

1 — Todo semiplano H pode ser representado na forma:

$$\operatorname{Im}(z-a)/b < 0$$

para a, b apropriados.

2 — O fecho convexo de um conjunto A é o menor conjunto convexo contendo A.

a) Prove que se A_k é convexo, então: $\cap A_k$ também é convexo.

b) Prove que o fecho convexo de um conjunto sempre existe.

c) Dado um conjunto de pontos complexos $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ prove que o fecho convexo de A é:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{|S|} \alpha_i x_i \;\middle|\; (\forall i : \alpha_i \geq 0) \wedge \sum_{i=1}^{|S|} \alpha_i = 1 \right\}$$

d) Conclua que no caso em que $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto de pontos no plano complexo então o fecho convexo é um polígono.

3 — Mostre que os fechos convexo do conjunto das raízes de $P(z)$ é um polígono que também contém as raízes de $P'(z)$.

Sequências e Séries

4 — Calcule os termos de ordem ≤ 3 para as séries:

a) $e^z \operatorname{sen} z$

b) $\sin z \cos z$

c) $\frac{e^z - 1}{z}$

d) $\frac{\sin z}{\cos z}$

5 — Prove que uma sequência convergente é limitada.

6 — Prove que uma sequência complexa $z_n = x_n + iy_n$:

a) converge se e somente se x_n e y_n convergem.

b) é de Cauchy se e somente se x_n e y_n são de Cauchy.

7 — Mostre que se $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ então:

$$\lim_{n\to\infty} (z_1 + \cdots + z_n) = A$$

8 — Mostre que a soma de uma série absolutamente convergente não se altera se os termos são reordenados.

9 — Discuta a convergência e a convergência uniforme:

a) da sequência nz^n.

b) da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ para todos os valores reais de x

10 — Use a série geométrica para mostrar que:

a) $z + z^3 + \cdots + z^{2n+1} = \dfrac{z}{1-z^2}$ para todo $|z| < 1$

b) $1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots + (-1)^n z^2 n + \cdots = \dfrac{1}{1+z^2}$ para todo $|z| < 1$

c) $1 + 4z^2 + 16z^4 + \cdots + 4^n z^2 n = \dfrac{1}{1-4z^2}$ para todo $|z| < 1/2$

d) $1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ para todo $|z| < 1$

e) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \log(1+x)$

11 — Expanda $(1-z)^m$, para m inteiro positivo, em potências de z.

12 — Expanda $\dfrac{2z+3}{z+1}$ em potências de $z-1$. Qual o raio de convergência?

13 — Ache o raio de convergência das seguintes séries de potência:

a) $\sum n^p z^n$

b) $\sum n! z^n$

c) $\sum z^{n!}$

d) $\sum n^2 z^n$

e) $\sum (\log n)^2 z^n$

f) $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$

14 — Enuncie o critério M de Weierstrass e utilize-o para verificar a convergência uniforme das seguintes séries nos conjuntos dados. Faça os gráficos da série para vários valores de n (use um CAS).

a) $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots$ em $[a, b]$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$ para $-1 < x < 1$

15 — Se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ convergem uniformemente prove que $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente. Se além disso $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ são sequências de funções limitadas, prove que $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente em I.

16 — Se $\sum a_n z^n$ e $\sum b_n z^n$ tem raios de convergência R_1 e R_2 respectivamente, mostre que o raio de convergência de $\sum a_n b_n z^n$ é pelo menos $R_1 R_2$

17 — Mostre que se $f(z) = \sum a_n z^n$ e $g(z) = \sum b^n z^n$ convergem absolutamente no disco então as seguintes séries de potência também convergem:

a) $f(z) + g(z)$

b) $f(z)g(z)$ (produto de Cauchy)

Funções Elementares

18 —

a) Descreva todos os números complexos tais que $e^z = 1$

b) Dado que $e^\alpha = w$ Descreva todos os números complexos tais que $e^z = w$

c) Descreva todos os z tais que $e^z = e^w$

19 — Calcule

a) $\text{sen}(i)$

b) $\cos(i)$

c) $e^(2i)$

20 — Mostre que:

a) $\dfrac{d}{dz} e^z = e^z$

b) $e^z e^w = e^{z+w}$

c) $(e^z)^n = e^{nz}$

d) $\dfrac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z$

e) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$

f) $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

g) $|\operatorname{sen} z| = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$

h) $|\cos z| = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$

i) $\cosh(iz) = \cos(z)$

j) $\cos(iz) = \cosh(z)$

k) $-i \operatorname{senh} iz = \operatorname{sen} z$

l) $-i \operatorname{sen} iz = \operatorname{senh} z$

m) $\sinh(z + i\pi) = -\sinh(z)$

n) $\cosh(z + i\pi) = -\cosh z$

o) $\tan(z + i\pi) = \tan z$

21 — Ache todas as raízes da equação:

a) $e^z = -2$

b) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

c) $\cos z = 2$

d) $\cosh z = \frac{1}{2}$

e) $\sinh z = i$

22 — Calcule

a) $\operatorname{Log}(-ie)$
b) $\operatorname{Log}(1-i)$

23 — Mostre que:
a) $\operatorname{Log}(1+i)^2 = 2\operatorname{Log}(1+i)$
b) $\operatorname{Log}(-1+i)^2 \neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$

Extras

24 — Seja a_n e b_n duas sequências positivas e seja

$$c_n = b_n - \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n}.$$

Prove que:
a) Se existe uma constante positiva r tal que $c_n > r > 0$ para todo $n > N$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
b) Se $c_n < 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ diverge então somatório de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

25 — Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Prove o teste de Raabe.
a) Se existe um $r > 0$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n} \text{ para todo } n > N$$

Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 - \frac{1}{n} \text{ para todo } n > N$$

Respostas dos Exercícios

24 itema Dica: Mostre que $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < a_N b_N / r$ itemb Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ domina $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$

25 Dica: use o exercício anterior com $b_{n+1} = n$