UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 4 - Funções de Variáveis Complexas

Integração

1 — Mostre que para n, m inteiros:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt}e^{-int}dt = \left\{ \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 2\pi & \text{se } m = n \end{cases} \right.$$

2 — Calcule as seguintes integrais complexas

a) $\oint_\gamma \frac{1}{z}dz$, sendo γ o círculo unitário de raio 1 com a orientação anti-horária.

b) $\oint_\gamma \bar{z}dz$, sendo γ o círculo unitário de raio 1 com a orientação anti-horária.

c) $\oint_\gamma \bar{z}+z\bar{z}dz$, sendo γ o quadrado unitário (de lado 2 e centrado na origem) com a orientação horária.

d) $\oint_\gamma \frac{\bar{z}}{8+z}dz$, sendo γ o retângulo de vértices $\pm 3 \pm i$ com a orientação horária.

e) $z^m\bar{z}^n dz$, sendo γ o círculo unitário de raio 1 com a orientação anti-horária.

3 — Dado C o arco do círculo $|z| = 2$ ligando $z = 2$ até $z = 2i$, sem calcular a integral mostre que:

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^3+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

4 — Mostre que

$$\int_\gamma z^n dz = \frac{1}{n+1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}$$

desde que γ vá de α até β.

5 — Dado

$$g(z) = \oint_{\partial B(0,r)} \frac{2s^3 - s - 2}{s - z}ds.$$

Mostre que $g(2) = 8\pi i$

6 — Dado γ uma curva fechada simples com a orientação anti-horária e

$$g(z) = \oint_\gamma \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} ds$$

Mostre que $g(z) = 6\pi i z$ se z está no interior de γ e $g(z) = 0$ caso contrário.

7 — Calcule:

a) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta$ sendo γ o círculo de raio 3 e centro 0 com a orientação anti-horária.

b) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\zeta}{(\zeta + 4)(\zeta - 1 + i)} d\zeta$ sendo γ o círculo de raio 1 e centro 0 com a orientação anti-horária.

c) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{\zeta + 2} d\zeta$ sendo γ o círculo de raio 5 e centro 0 com a orientação horária.

d) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^\zeta}{\zeta + 2} d\zeta$ sendo γ o círculo de raio 2 e centro 2 com a orientação horária.

8 — Dado f analítica num aberto contendo uma curva fechada simples γ e seja $z_0 \notin \gamma$, então:

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

9 — Verifique o princípio do máximo para $f(z) = (z + 1)^2$ e a região triangular R cujos vértices são os pontos $z = 0, z = 2, z = i$

10 — Dado um polinômio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad n \geq 1$$

então existe $R > 0$ tal que:

$$|p(z)| > \frac{|a_n|\,|z|^n}{2}$$

para todo z tal que $|z| > R$.
Conclua que $P(z)$ é contínua na esfera de Riemman.

11 — Dado um aberto U e R um retângulo contido em U e f uma função analítica em U.

a) Mostre que f possui antiderivada em R.

b) Use o resultado anterior para mostrar que:

$$\oint_{\partial R} f(z)dz = 0$$

12 —

a) Se f é inteira então f possui antiderivada.

b) Se f é inteira e γ é uma curva fechada então

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

13 — Se f é inteira e se para algum inteiro $k \geq 0$, existirem constantes positivas A e B tais que:

$$|f(z)| \leq A + B\,|z|^k$$

então f é um polinômio de grau no máximo k.
Dica: indução considerando a função

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

14 — Prove que uma função inteira satisfazendo:

- $f(z+k) = f(z)$
- $f(z+hi) = f(z)$

para todo z e para h, k reais e positivos é constante.
Dica: A função é limitada.

15 — Mostre que se f é inteira e γ uma curva diferenciável que engloba o ponto a então:

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_\gamma {\frac{f(s)}{s-a}}^{k+1} ds$$

16 — Prove o teorema de Morera:
Dado U aberto e conexo e $f : U \to \mathbb{C}$ contínua. Se para toda curva fechada γ em U tivermos que:

$$\oint_\gamma f(s)ds = 0$$

então f é holomorfa em U.
Dica: fixe um ponto P e defina $F(Q) = \int_C f(z)dz$ sendo C uma curva ligando P e Q. Mostre que F está bem definida e satisfaz Cauchy-Riemann.

17 — Dado uma curva γ diferenciável, englobando uma domínio D simplesmente conexo e $g : \gamma \to \mathbb{C}$ contínua, como podemos estender g analiticamente para D?