UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 5 - Funções de Variáveis Complexas

Integração e Resíduos

1 — Mostre que uma função que é analítica em todo plano e possui uma singularidade não essencial em ∞ é um polinômio.

2 — Mostre que as funções e^z e $\operatorname{sen} z$ possuem singularidades essenciais no infinito.

3 — Mostre que qualquer função meromórfica no plano estendido é racional.

4 — Prove que se $f(z)$ é analítica em U então

$$w(\gamma, a)f(a) = \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a}$$

Para todo círculo que é homologo a zero em U.

5 — Prove que duas curvas homotópicas são homologas.

6 — Para cada função abaixo ache o ponto singular, determine se é um polo, uma singularidade removível ou essencial e calcule a parte principal:

a) $ze^{1/z}$

b) $\dfrac{z^2}{1+z}$

7 — Mostre que os pontos singulares das funções abaixo são polos, determine a ordem de cada polo e o resíduo.

a) $\tanh z$

b) $\dfrac{1-\exp(2z)}{z^4}$

c) $\dfrac{z}{\cos z}$

d) $\dfrac{\exp z}{z^2+\pi^2}$

8 — Ache a série de Laurent para:

a) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ em torno de $z = i$

b) $\dfrac{\exp(1/z^2)}{z-1}$ em torno de $z = 0$

c) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ para $0\,|z| < 1$

d) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ para $1\,|z| < 2$

e) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ para $|z| > 2$

9 — Expanda $\operatorname{senh} z$ em potências de $z - \pi i$ para provar que:

$$\lim_{z\to\pi i} \frac{\operatorname{senh} z}{z-\pi i} = -1$$

10 — Suponha que f é analítica em z_0 e que $f(z_0) = 0$. Use séries para mostrar que:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

11 — Prove a forma de L'Hopital para funções analítica em z_0 usando séries.

12 — Prove a forma de L'Hopital para funções analítica em z_0 usando que numa vizinhança do zero uma função analítica pode ser escrita como $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ com $g(z)$ analítica.

13 — Prove que se γ é uma curva regular, f é uma função meromórfica dentro e sobre γ e que γ não passe nem por polos e nem por zeros, então:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'}{f} = Z - P$$

sendo:

Z o número de zeros dentro de γ contado com multiplicidade;
P o número de polos dentro de γ contado com multiplicidade;
Dica: veja o que é $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}\right)$.

14 — Conclua que: (Princípio do Argumento)
Se f é analítica dentro e sobre a curva γ e não é zero sobre γ então

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'}{f} = Z(f)$$

sendo
$Z(f)$ o número de zeros de f dentro de γ contado com multiplicidade;

15 — Prove o Teorema de Rouche:
Suponha que f e g sejam analíticas dentro e em γ e que $|f(z)| > |g(z)|$ então:

$$Z(f+g) = Z(g)$$

dentro de γ.
Dica: escreva $f+g = f(1+g/f)$ e use o Princípio do Argumento.

16 — Ache os números de zero de

a) $3e^z - z$ em $|z| \leq 1$
b) $z^4 - 5z + 1$ em $1 \leq |z| \leq 2$
c) $z^6 - 5z^4 + 3z^2 - 1$ em $|z| \leq 1$

17 — Dado um polinômio da forma $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ com com todos a_i reais e com $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$. Prove que todos os zeros de $p(z)$ estão no disco unitário.
Dica: Use o teorema de Rouche para $(1-z)p(z)$.

18 — Prove que para todo $\rho < 1$ o polinômio $1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n$ não tem zeros dentro do disco $|z| < \rho$ se n é suficientemente grande.

19 — Prove o teorema fundamental da álgebra usando o teorema de Rouche.

Resíduos

20 — Ache os polos e resíduos das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$
b) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$
c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$
d) $\dfrac{1}{z^m(1-z)^n}$

21 — Calcule as seguintes integrais pelo método de resíduos:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\operatorname{sen}^2 x}$ para $|a| > 1$
b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+5x^2+6}$
c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}$
d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{1+x^2}$
e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x dx}{5+3\cos x}$
f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x}$ para $0 < \alpha < 1$
g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2+b^2)^2}$
h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^4+4} dx$
i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}\theta d\theta$

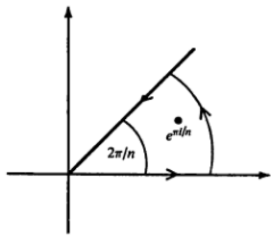
22 — Calcule
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx$$

Dica: Integre $(e^{2iz} - 1 - 2iz)/z^2$ ao longo de um grande semi-círculo

23 — Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$.
Dica: Use o contorno:



24 — Mostre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\pi}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$$

25 — Calcule $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$:

Observando que:

a) $\binom{n}{k}$ é o coeficiente de z^k na expansão de $(1+z)^n$

b) $\binom{n}{k}$ é o coeficiente de z^{-k} na expansão de $(1+1/z)^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ é o coeficiente do termo constante de $(1+z)^n(1+1/z)^n$

d) logo, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C (1+z)^n(1+1/z)^n \frac{dz}{z}$

e) logo, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1+z)^{2n}}{z^n+1} dz$

f) logo, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ é o coeficiente de z^n em $(1+z)^{2n}$

26 — Mostre que se $f(z)$ é analítica e limitada para todo $|z| < 1$ e se $|\zeta| < 1$ então:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} \frac{f(x)dxdy}{(1-\bar{z}\zeta)^2}$$

Dica: Use coordenadas polares e resíduos.

Teorema da curva fechada de Jordan

27 — O teorema da curva de Jordan afirma que cada curva de Jordan no plano determina exatamente duas regiões. A noção de winding number leva a uma prova rápida de uma parte do teorema, ou seja, que o complementar de uma curva de Jordan tem, pelo menos, duas componentes.

Este será o caso se existir um ponto a com um $w(\gamma, a) > 0$

a) Prove que Podemos supor que $\mathrm{Re} z > 0$ em γ.

b) Prove que podemos assumir que existem pontos z_1, z_2 em γ com $\mathrm{Im} z1 < 0$, $\mathrm{Im} z2 > 0$. Estes pontos podem ser escolhidos de modo a que não existem outros pontos de γ sobre os segmentos de linha de 0 a z_1 e entre 0 a z_2.

c) Seja γ_1 e γ_2 serem os arcos de γ ligando z_1 a z_2 (excluindo os pontos da extremidade).
Deixe σ_1 ser a curva fechada que consiste no segmento de reta de 0 a z_1 seguido por γ_1 e o segmento que liga z_2 a 0, e σ_2 a curva que pode ser construída da mesma forma, com γ_2 no lugar de γ_1. Então mostre que $\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\gamma$
Notação: O eixo real positivo cruza ambas as curvas γ_1 e γ_2 (porquê?). Escolha a notação de modo que a intersecção x_2 mais à direita seja com z_2
Prove que:

d) $w(\sigma_1, x_2) = 0$ logo $w(\sigma_1, z) = 0, \forall z \in \gamma_2$

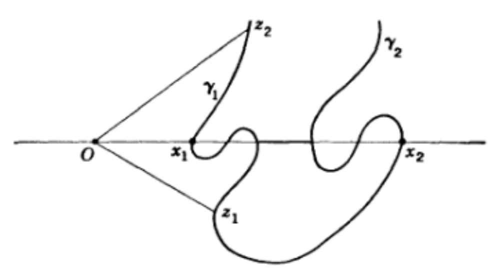
e) $w(\sigma_1, x) = w(\sigma_2, x) = 1$ para $x > 0$ pequeno.

f) A primeira intersecção x_1 com o eixo positivo real com γ fica em γ_1

g) $w(\sigma_2, x_1) = 1$ logo $w(\sigma_2, z) = 1$ para todo $z \in \gamma_1$

h) Conclua que como existe um segmento do eixo real positivo com um final em γ_1 e outro em γ_2 e nenhum outro ponto em γ, então os pontos x do segmento acima satisfazem
$w(\gamma, x) = \pm 1$

i) Conclua.



28 — Mostre que se z pertence a uma componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ então:

$$w(\gamma, x) = 0$$