Nome: **Ra:**

Exame - CVT

Avisos:

- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É terminantemente proibido consultar qualquer material ou colega.
- Guarde o celular na bolsa. Caso seja pego usando o celular ou mesmo com o celular no bolso sua nota será zerada.

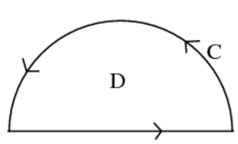
Ex. 1 — 2pt Considere o campo $\mathbf{F} = (-y^2, x, z^2)$, e C a curva que é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Calcule ds $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de dois modos:

1. diretamente
2. usando o teorema de Stokes

Ex. 2 — 2pt Calcule

$$\oint_C 2y^2 \; dx + 6xy \; dy$$

onde C é o fronteira orientada no sentido anti-horário da metade superior do disco unitário, utilizando o Teorema de Green.



de duas maneiras diferentes.

1. diretamente
2. usando o teorema de Green

Ex. 3 — 3pt Dado o sistema de coordenadas no plano definido por

$$x = e^u \operatorname{sen} v, y = e^u \cos v.$$

1. Calcule o tensor métrico.
2. Esse sistema de coordenada é ortogonal? Justifique
3. Escreva o rotacional nesse sistema de coordenada.
4. Calcule $\nabla \times (u\, \mathbf{e}_u)$
5. Calcule os símbolos de Christoffel Γ^1_{11} e Γ^1_{12}

Ex. 4 — 3pt Seja $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ou em componentes,

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \tag{1}$$

Considere uma mudança de base dada por uma matriz A.

1. Mostre que $\varepsilon_{pqr} \det(\mathsf{A}) = \varepsilon_{ijk} \mathsf{A}^p_i \mathsf{A}^q_j \mathsf{A}^r_k$
2. Mostre que $\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k$ muda de coordenadas como $\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \det(\mathsf{A})$
3. Defina $c = a \times b$. Mostre que $\tilde{c}_i = (\det \mathsf{A})\, \mathsf{A}_{ik} c_k$.
4. Conclua que o símbolo de Levi-Civita ε_{ijk} é um pseudo-tensor cartesiano constante de ordem 3.

Fórmulas Úteis

$$
\begin{aligned}
\nabla\Phi &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}+\frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}+\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]\\
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\mathbf{e}}_1 & h_2\hat{\mathbf{e}}_2 & h_3\hat{\mathbf{e}}_3\\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}\\
\nabla^2\Phi &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1})+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2})+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3})\right]
\end{aligned}
$$

$$g_{ij}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^i} \tag{2}$$

$$g^{ik}g_{kj}=\delta^i{}_j \qquad \& \qquad g_{ik}g^{kj}=\delta_i{}^j \tag{3}$$

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{g^{kl}}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \tag{4}$$