Lista 0

Análise Real I

Conjuntos e Funções, Conjuntos Finitos e Enumeráveis

Exercícios.

1 — Calcule

a) $\bigcap_{x\in 2,\infty)} \left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$

b) $\bigcup_{x\in[1,2]} \left(\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}\right)$

c) $\bigcap_{\epsilon>0)} (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

2 — Demonstre que:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} A \cup A_i$

c) $A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} A \cap A_i$

3 — Dado uma função $f : A \to B$, uma família $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de A e uma família $(B_\mu)_{\mu\in M}$ de subconjuntos de A prove que:

a) $f(\bigcup A_\lambda) = \bigcup f(A_\lambda)$

b) $f(\bigcap A_\lambda) \subset \bigcap f(A_\lambda)$

c) $f^{-1}(\bigcup B_\mu) = \bigcup f^{-1}(A_\mu)$

d) $f^{-1}(\bigcap B_\mu) = \bigcap f^{-1}(A_\mu)$

4 — Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito. Prove que existe uma única bijeção crescente $f\mathbb{N} \to X$.

5 — Dada uma sequência de conjuntos A_n com $n \in \mathbb{N}$ defina:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)$$

a) Prove que $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para um número infinito de n.

b) Prove que $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todos os A_n salvo um número finito de valores de n.

c) Mostre que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

d) Mostre que se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n então $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

e) Mostre que se $A_n \supset A_{n+1}$ para todo n então $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

f) De exemplos de A_n tais que $\liminf A_n \neq \limsup A_n$