

Lista 1

Análise Real I

Números Reais

Exercícios.

1 — Dado $x = A|B$ e $y = C|D$ cortes. Mostre que

- a) $x+y=y+x$
- b) $x+(y+z)=(x+y)+z$
- c) $x \cdot y = y \cdot x$
- d) $x < y$ então $x + z < y + z$

2 — Dado o corte

$$A|B = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \text{ ou } r^2 < 2\} | \{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r \geq 2\}$$

- a) Mostre que $(A|B)^2 = (A|B)(A|B) = 2$.
- b) Defina um corte $C|D$ tal que $(C|D)^2 = a$, para $a \in \mathbb{Q}, a > 0$

3 — Dado um conjunto não vazio E , α o ínfimo desse conjunto e β o supremo desse conjunto. Mostre que $\alpha \leq \beta$.

4 — Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios e limitados. Defina $-A = \{-x, x \in A\}$. Mostre que

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

$$\inf(-A) = -\sup(A)$$

5 — Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios e limitados. Defina $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ e $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$. Mostre que:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

$$\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$$

Encontre expressões análogas para $\inf(A + B)$ e $\inf(A - B)$.

6 — Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios. Mostre que:

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

7 — Seja $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ Mostre que $\inf X = 0$

8 — Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função é dita limitada se $f(X) \subset R$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

a) Mostre que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada

b) Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$

c) Conclua que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$

d) Dê exemplos para os quais valham as desigualdades estritas

e) Mostre que o produto de duas funções limitadas é limitada

f) Mostre que $f \cdot g(X) \subset f(X) \cdot g(X)$

g) Conclua que se forem ambas positivas $\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$

9 —

a) Mostre que:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

b) Mostre que para $x, y \geq 0$:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

c) Dados A_n, G_n, H_n as médias aritméticas, geométricas e harmônicas:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Mostre que $A_n \geq G_n \geq H_n$

10 — Usando que $G_n \leq A_n$, mostre que:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \text{ para } x > 0$$

11 — Mostre que num corpo ordenado $a^2 + b^2 = 0$ se e somente se $a = b = 0$

12 — Dados x, y num corpo ordenado K , com $y \neq 0$, mostre que $|x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$

13 — Mostre que o supremo de um conjunto se existir é único.