Lista 4
Análise Real I

Limite de Funções

1 — Prove os seguintes limites por ϵ e δ

a) $\lim_{x\to a} x = a$

b) $\lim_{x\to a} |x| = a$

c) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

d) $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$

e) Se $a \neq 0$ então $\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

f) Dados polinômios $p(x), q(x)$ calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$

2 — Dados polinômios $p(x), q(x)$ mostre que se $q(a) \neq 0$ então $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$

3 — Mostre que não existe $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4 — Prove o seguinte teorema de Cauchy. Para que f tenha limite finito quando x tende a a é necessário e suficiente que para todo $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e $0 < |x' - a| < \delta$.

5 — Mostre exemplos de funções f, g tais que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ e $\lim_{x\to A} g(x) = B$ mas $\lim_{x\to a} g(f(x)) \neq B$.

6 — Prove que se $f(x) \leq g(x)$ para todo x numa ϵ-vizinhança de a então se existirem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ teremos:

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

7 — Prove que se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x numa ϵ-vizinhança de a então se existirem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} h(x)$ e estes forem iguais a L teremos que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e este é também igual a L.

8 — Prove usando o teorema do confronto o limite fundamental:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

9 — A oscilação de uma função $f : X \to R$ num conjunto $E \subset X$ é definido como:

$$\omega(f, E) := \sup |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Mostre o critério de Cauchy para existência de limites:
Uma função $f : X \to R$ possui limite quando $x \to a$ se e somente se para toda $\epsilon > 0$ existe uma aberto A contendo A tal que a oscilação de f em A é menor que ϵ.
Ou seja

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \forall\epsilon\exists A, A \text{ aberto e } a \in A, \omega(f, A) < \epsilon$$

10 — Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f : E \to \mathbb{R}$ não decrescente possua limite quando $x \to s^-$, $s = \sup E$ é que f seja limitada superiormente.

11 — Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona então o conjunto dos pontos $a \in X'$ para os quais não se tem $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ é enumerável.

12 — Dado $a > 0$, defina $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ como:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}.$$

a) Prove que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

b) Prove para cada $b \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x\to b} f(x)$

c) Prove que se $b \in \mathbb{Q}$ então $\lim_{x\to b} f(x) = a^b$

d) Se $b \notin \mathbb{Q}$ defina a^b como $\lim_{x\to b} f(x)$, i.e,

$$a^b := \lim_{x\to b} f(x)$$

Prove que $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$ para todo $b, b' \in \mathbb{R}$
Prove que se $b < b'$ então $a^b < a^{b'}$

e) Prove que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

f) Prove que $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$