Lista 6

Análise Real I

Derivadas

1 — Dado que f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Descreva os pontos de diferenciabilidade de $|f|$.

2 — Sejam f, g, h tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se em a tem se que $f(a) = h(a)$ e $f'(a) = h'(a)$ então existe $g'(a)$ e $g'(a) = f'(a)$.

3 — Seja $p(x)$ um polinômio de grau par. Então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p'(c) = 0$

4 — Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

para todo x, y reais. Prove que f é constante.

5 — Prove que se f é continua num intervalo fechado $[a, b]$, diferenciável num aberto (a, b), e se $f(a) = f(b) = 0$ então existe um real α e um $x \in (a, b)$ tal que:

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0$$

6 — Prove que se f, g são continua num intervalo fechado $[a, b]$, diferenciáveis num aberto (a, b), e se $f(a) = f(b) = 0$ então existe um $x \in (a, b)$ tal que:

$$g'(x)f(x) + f'(x) = 0$$

7 — Mostre que cada uma das equações

a) $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$

b) $3^x + 4^x = 5^x$
possui exatamente uma raiz real.

8 — Seja f uma função infinitamente diferenciável em 0. Mostre que

a) Se f é par então a serie de Taylor centrada na origem só possui termos da forma x^{2n}

b) Se f é impar então a serie de Taylor centrada na origem só possui termos da forma x^{2n+1}

9 — Mostre que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável com derivada limitada em I, então f é de Lipschitz.

10 — Mostre que dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ fixos, o resto da série de Taylor da função $cos(x)$ centrada em x e calculada em y converge para zero quando $n \to \infty$

11 — Seja $f : (-1, 1)$ tal que f', f'', f''' existam e sejam contínuas em $(-1, 1)$. Assuma $f'(0) = f''(0) = 0$ mas $f'''(0) \neq 0$. Mostre que $f(0)$ não é mínimo local.

12 — Suponha f definida numa vizinhança de x e suponha que $f''(x)$ exista. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

13 — Suponha g uma função real, diferenciável com derivada limitada ($|g'| < M$). Seja $\epsilon > 0$ e defina

$$f(x) = x + \epsilon g(x)$$

Prove que f é injetora se ϵ for suficientemente pequeno.

14 — Sejam f, g funções analíticas no intervalo aberto I. Se existe $a \in I$ tal que f e g coincidem juntamente com todas as suas derivadas. Então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. Mostre que isso seria falso se supuséssemos apenas f, g de classe c^∞.

15 — Se denotarmos por $T_n f(x; a)$ o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x)$ no ponto a. Mostre que

a) Seja $g(x) = f(cx)$ então $T_n g(x; a) = T_n f(cx; ca)$

b) Mostre que T_n é um operador linear.

c) Mostre que $(T_n f)' = T_{n-1} f'$

d) Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ então

$$T_{n+1}g(x) = \int_0^x T_n f(t)dt$$

16 — Utilize as Propriedades acimas para calcular os polinômios de Taylor de grau n para as seguintes funções:

a) e^{-x}

b) $\cosh x$

c) $\log(1-x)$ Dica use a série de Taylor de $1/(1-x)$

d) $\arctan(x)$ Dica use a série de Taylor de $1/(1+x^2)$