FUV - p1 -2015 - A

November 2, 2016

Ex. 1 -

1.Define-se a derivada de $f(x)$ no ponto a da seguinte maneira:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Ressalta-se que outra maneira de escrever o limite acima é

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pois quando $x \to a$, temos que $(x - a) \to 0$; e quando $h \to 0$, $(a + h) \to a$.

2.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 - (x^2 + 2xh + h^2)}{x^2(x^2 + 2xh + h^2)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-2xh - h^2}{x^4 + 2x^3h + h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2xh - h^2}{x^4h + 2x^3h^2 + h^3} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-2x - h}{x^4 + 2x^3h + h^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}.$$

O exercício pode também ser resolvido usando o segundo limite apresentado no item anterior da seguinte maneira:

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{\frac{x^2-y^2}{y^2x^2}}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{\frac{(x-y)(x+y)}{y^2x^2}}{y-x} =$$

$$\lim_{y\to x} \frac{(x-y)(x+y)}{y^2x^2}.\frac{1}{(y-x)} = \lim_{y\to x} \frac{-(y-x)(x+y)}{y^2x^2(y-x)} = \lim_{y\to x} \frac{-(x+y)}{y^2x^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

3. Tome a arbitrário no domínio de f. O objetivo é mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Como f é diferenciável

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Usando o fato de que $\frac{x-a}{x-a} = 1$

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} (f(x)-f(a))\frac{(x-a)}{(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}(x-a).$$

Lançando mão da regra do produto para limites,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}(x-a) = f'(a).0 = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0.$$

Logo, como $f(a)$ é constante,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Como o a foi tomado de maneira arbitrária no domínio de f temos que f é contínua para todo a. Logo, f é contínua.

Ex. 2 -

1. Como a derivada da soma é a soma das derivadas, i.e, $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g$,

$$\frac{d}{dx}((2x+1)^{25} + \arccos(3x^2)) = \frac{d}{dx}(2x+1)^{25} + \frac{d}{dx}\arccos(3x^2)$$

Lançando mão da regra da cadeia, i.e., $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)).g'(x)$,

$$\frac{d}{dx}(2x+1)^{25} = 25(2x+1)^{24}.(2x+1)' = 25(2x+1)^{24}.2 = 50(2x+1)^{24}$$

e, usando também o fato de que $\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (A demonstração deste fato pode ser achada em `http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/derivadas.html#/80`),

$$\frac{d}{dx}\arccos(3x^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}(3x^2)' = \frac{-1}{\sqrt{1-9x^4}}(6x) = -\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}((2x+1)^{25} + \arccos(3x^2)) = 50(2x+1)^{24} - \frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$$

2. Aqui usaremos o fato de que ln é a função inversa de e, i.e.,

$$e^{\ln(x)} = x.$$

Assim,

$$x^{x+2} = e^{\ln x^{x+2}}.$$

Como $\ln a^b = b \ln a$,

$$x^{x+2} = e^{(x+2)\ln x}.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}x^{x+2} = \frac{d}{dx}e^{(x+2)\ln x}.$$

Lançando mão da regra da cadeia, e do fato de que $\frac{d}{dx}e^x = e^x$,

$$\frac{d}{dx}e^{(x+2)\ln x} = e^{(x+2)\ln x}((x+2)\ln x)'.$$

Agora, lançando mão da regra do produto, i.e. $(f.g)' = f'.g + f.g'$,

$$e^{(x+2)\ln x}((x+2)\ln x)' = e^{(x+2)\ln x}((x+2)'\ln(x) + (x+2)\ln' x) =$$

$$e^{(x+2)\ln x}\left(\ln(x) + \frac{x+2}{x}\right) = x^{x+2}\left(\ln(x) + \frac{x+2}{x}\right) = x^{x+2}\left(\frac{x\ln x + x + 2}{x}\right) =$$

$$x^{x+1}(x\ln x + x + 2)$$

De sorte que

$$\frac{d}{dx}x^{x+2} = x^{x+1}(x\ln x + x + 2)$$

3. Sejam $f(x) = e^x - e^{-x}$ e $g(x) = \ln(x+1)$. Aqui, lançaremos mão da regra do quociente, i.e.,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}.$$

$$f'(x) = (e^x - e^{-x})' = (e^x)' - (e^{-x})' = e^x - (e^{-x})'.$$

Usando a regra da cadeia,

$$(e^{-x})' = -e^{-x}.$$

Assim,

$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$

.

Agora,

$$g'(x) = (\ln(x+1))'.$$

Lançando mão da regra da cadeia novamente,

$$g'(x) = (x+1)' \ln'(x+1) = 1.\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x)} = \frac{(e^x + e^{-x})\ln(x+1) - (e^x - e^{-x})\frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)} =$$

$$\frac{e^x(\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}) + e^{-x}(\ln(x+1) + \frac{1}{x+1})}{\ln^2(x+1)} =$$

$$\frac{e^x\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)-1}{x+1}\right) + e^{-x}\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)+1}{x+1}\right)}{\ln^2(x+1)} =$$

$$\frac{e^x((x+1)\ln(x+1) - 1) + e^{-x}((x+1)\ln(x+1) + 1)}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

4. Temos que o polinômio de Taylor de f de ordem 2 centrado em 1 é dado por

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)(x-1)^2.$$

Temos que

$$\ln(1) = 0;$$

$$\ln'(1) = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1;$$

$$\ln''(1) = -\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=1} = -1.$$

Deste modo,

$$P_2(x) = 0+1(x-1)-1(x-1)^2 = (x-1)(1-(x-1)) = (x-1)(2-x) = -x^2+3x-2.$$

Ex. 3- Como a parede é vertical, ela faz um àngulo de $\frac{\pi}{2}$ $(= 90°)$ com o chão, assim a cada instante a escada forma um triângulo retângulo com a parede e o chão. Seja $\beta(t)$ o ângulo que o topo da escada faz com a parede no instante t e seja $l(t)$ a distância entre a base da escada e a parede no mesmo instante. Note então que, como a escada é a hipotenusa deste triângulo e tem $10m$ de comprimento, $l(t) = 10.\sin(\beta(t))$.

Usando a regra da cadeia temos

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\beta}.\frac{d\beta}{dt}.$$

Pelo exposto acima,

$$\frac{dl}{d\beta} = 10.\cos(\beta).$$

E pelo enunciado,

$$\frac{dl}{dt} = 2.$$

Então,

$$2 = 10.\cos(\beta).\frac{d\beta}{dt}.$$

Assim,

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{5\cos(\beta)}.$$

Quando $\beta = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{5\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Ex. 4 -

1. Note que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 + 2 \neq 0$, então $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. Pelo mesmo motivo, f é contínua e, portanto, não há assíntotas verticais.

Agora, usando L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Do mesmo modo,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2+2} = 1.$$

Assim, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

2. $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{(x^2)'(x^2+2) - x^2(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2x(x^2+2) - x^2.2x}{(x^2+2)^2} =$

$$\frac{2x(x^2+2-x^2)}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$$

Como $(x^2+2)^2 > 0$ para todo x,

$$\frac{d}{dx}f(x) \begin{cases} > 0, \text{ se } x > 0 \\ = 0, \text{ se } x = 0 \\ < 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Então, f cresce em $]0, \infty[$ e decresce em $]-\infty, 0[$.

3. $f''(x) = (f'(x))' = \left(\dfrac{4x}{(x^2+2)^2}\right)' = \dfrac{(4x)'(x^2+2)^2 - 4x((x^2+2)^2)'}{(x^2+2)^4} =$

$$\frac{4(x^2+2)^2 - 4x(2(x^2+2)2x)}{(x^2+2)^4} = \frac{4(x^2+2)^2 - 16x^2(x^2+2)}{(x^2+2)^4} =$$

$$\frac{4(x^2+2) - 16x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{-12x^2+8}{(x^2+2)^3}$$

Note, portanto, que $f''(x) < 0$ se, e somente se, $-12x^2+8 \geq 0$.

$$-12x^2+8 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{8}{12} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}},$$

sendo 0 se, e somente se, x assumir os valores extremos.

Assim, a concavidade de f é positiva se, e somente se, $x \in \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$.

4.