Nome: ______________________ **Ra:** ______________________

Gabarito da Prova 1. A - CVT

Avisos:

- Justifique todas suas respostas.
- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É terminantemente proibido consultar qualquer material ou colega, usar celular ou calculadora.

Ex. 1 — (2.5pt)

1. Mostre que:

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$$

2. Um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo e é dito irrotacional se seu rotacional for nulo. Mostre que se $\mathbf{u}$ é irrotacional e $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então $\mathbf{u}\times\mathbf{r}$ é solenoidal.

Solução - 1.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)^2\cos^2\theta && (1)\\
&= (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)^2(1-\sin^2\theta) && (2)\\
&= (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 && (3)
\end{aligned}$$

2. Usaremos a identidade $\nabla\bullet\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{v}\bullet\nabla\times\mathbf{u} - \mathbf{u}\bullet\nabla\times\mathbf{v}$

Logo

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{r}) &= \mathbf{r}\bullet\nabla\times\mathbf{u} - \mathbf{u}\bullet\nabla\times\mathbf{r} && (4)\\
&= 0 - 0 = 0 && (5)
\end{aligned}$$

Ex. 2 — (2.5pt)

1. Defina precisamente a derivada de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ no ponto $\mathbf{a}$.
2. Dado $\mathbf{c}$ um vetor constante e

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x}\times(\mathbf{x}+\mathbf{c}) \end{array}.$$

Mostre que F é diferenciável e calcule sua derivada.

Solução - 2.

1.
Uma função $\mathbf{f}$ é dita **diferenciável** em $\mathbf{x}$ se existe uma transformação linear $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})$ tal que

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{||\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathrm{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})(\mathbf{h})||}{||\mathbf{h}||} = 0.$$

2. Observe inicialmente que

$$\mathbf{x}\times(\mathbf{x}+\mathbf{c}) = \mathbf{x}\times\mathbf{c}$$

Mostraremos que a derivada é $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})(\mathbf{h}) = \mathbf{h}\times\mathbf{c}$. Observe que já demonstramos que essa função é linear em h pois o produto vetorial é linear em cada entrada.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{||(\mathbf{x}+\mathbf{h})\times\mathbf{c} - \mathbf{x}\times\mathbf{c} - \mathbf{h}\times\mathbf{c}||}{||\mathbf{h}||} && (6)\\
&= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{||\mathbf{h}\times\mathbf{c} - \mathbf{h}\times\mathbf{c}||}{||\mathbf{h}||} = 0 && (7)
\end{aligned}$$

2. Solução alternativa
Observe inicialmente que

$$\mathbf{x}\times(\mathbf{x}+\mathbf{c}) = \mathbf{x}\times\mathbf{c}$$

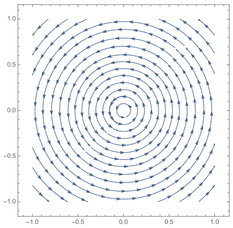
e que $F(x) = \mathbf{x}\times\mathbf{c}$ é uma transformação linear. Logo $F'(x)h = \mathbf{h}\times\mathbf{c}$.

Ex. 3 — (2.5pt) Considere o escoamento bidimensional $\mathbf{v}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.

1. Desenhe o campo $\mathbf{v}$
2. Mostre que $\nabla\times\mathbf{v} = 0$;
3. Calcule a integral de linha $\oint_\gamma \mathbf{v}\cdot d\ell$, onde γ é uma circunferência com centro na origem e raio 1, orientada positivamente.
4. É possível concluir, a partir do item (b), que $\mathbf{v}$ não é um campo conservativo?
5. Utilize o Teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_\gamma \mathbf{v}\cdot d\ell$, onde γ é uma circunferência de centro em $(2,2)$ e raio 1.

Solução - 3.

1.



2. $\nabla \times \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 0$

3. Circunferência: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ logo

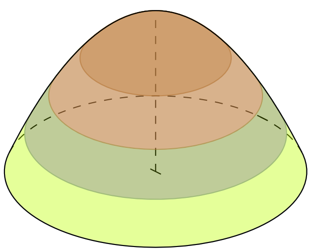
$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

4. Não. A integral depende do caminho.

5.

$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\ell = \iint_A 0 dx dy = 0$$

Ex. 4 — (3pt) Considere a superfície S descrita pelo parabalóide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$, como mostrado na figura abaixo.



Considere a seguinte orientação: deixe $\hat{n}$ denotar o vetor normal unitário para S com componente z positiva. A intersecção da superfície S com o plano $z = 0$ será uma curva C.

Verifique o Teorema de Stokes para a superfície S descrita acima e o campo vetorial $\mathbf{F} = (3y, 4z, -6x)$.

Solução - 4.

Integral de superfície

Gráfico de superfície: implica que o vetor normal fundamental é

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(x, y) &= -f_x(x, y)\,\mathbf{i} - f_y(x, y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} && (8) \\ &= (2x, 2y, 1) && (9) \end{aligned}$$

Como $\nabla \times \mathbf{F} = (-4, 6, 3)$. Logo $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}(x, y) = -8x + 12y - 3$

E a integral fica:

$$\iint_R -8x + 12y - 3 dx dy$$

Usando polares:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 (-8r\cos\theta + 12r\sin\theta - 3)\, r dr d\theta = -48\pi$$

Integral de Caminho

Para a integral de caminho $C(t) = (4\cos t, 4\sin t, 0)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Logo $C'(t) = (-4\sin t, 4\cos t, 0)$ e $F(C(t)) = (12\sin(t), 0, -24\cos(t))$.

Logo

$$\oint_C F \bullet d\ell = \int_0^{2\pi} -48\sin^2 t\; dt = -48\pi$$