Nome: Ra:

Prova 1. A - CVT

Avisos:

- Justifique todas suas respostas.
- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É terminantemente proibido consultar qualquer material ou colega, usar celular ou calculadora.

Ex. 1 — (2.5pt)

1. Mostre que:

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$$

2. Um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo e é dito irrotacional se seu rotacional for nulo. Mostre que se $\mathbf{u}$ é irrotacional e $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então $\mathbf{u}\times\mathbf{r}$ é solenoidal.

Ex. 2 — (2.5pt)

1. Defina precisamente a derivada de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ no ponto $\mathbf{a}$.
2. Dado $\mathbf{c}$ um vetor constante e

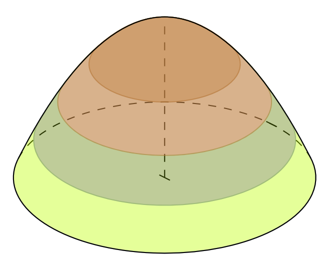
$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x}\times(\mathbf{x}+\mathbf{c}) \end{array}.$$

Mostre que F é diferenciável e calcule sua derivada.

Ex. 3 — (2.5pt) Considere o escoamento bidimensional $\mathbf{v}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.

1. Desenhe o campo $\mathbf{v}$
2. Mostre que $\nabla\times\mathbf{v} = 0$;
3. Calcule a integral de linha $\displaystyle\oint_\gamma \mathbf{v}\cdot d\ell$, onde γ é uma circunferência com centro na origem e raio 1, orientada positivamente.
4. É possível concluir, a partir do item (b), que $\mathbf{v}$ não é um campo conservativo?
5. Utilize o Teorema de Green para calcular a integral de linha $\displaystyle\oint_\gamma \mathbf{v}\cdot d\ell$, onde γ é uma circunferência de centro em $(2,2)$ e raio 1.

Ex. 4 — (3pt) Considere a superfície S descrita pelo parabalóide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$, como mostrado na figura abaixo.



Considere a seguinte orientação: deixe $\hat{n}$ denotar o vetor normal unitário para S com componente z positiva. A intersecção da superfície S com o plano $z = 0$ será uma curva C.
Verifique o Teorema de Stokes para a superfície S descrita acima e o campo vetorial $\mathbf{F} = (3y, 4z, -6x)$.