Nome: Ra:

Prova 1
CVT

Avisos:

- Justifique todas suas respostas.
- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É terminantemente proibido consultar qualquer material ou colega, usar celular ou calculadora.

Ex. 1 — (1.2pt) Dados os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e constantes reais a e b, mostre que:

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$$

Ex. 2 — (1.3pt) Um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo e é dito irrotacional se seu rotacional for nulo. Mostre que se $\mathbf{u}$ é irrotacional e $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$ é solenoidal.

Ex. 3 — (2.5pt)

1. Defina precisamente a derivada de $\mathbf{F}(x)$ no ponto a.
2. Dado $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 1, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}}$. Prove que
$$\mathrm{D}_{\mathbf{x}}(f)(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{x}\|},$$
para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
3. Prove que $\mathbf{f}$ não é diferenciável no $\mathbf{0}$.

Ex. 4 — (2.5pt) Calcule a integral

$$\oint_C y^3 \ \mathrm{d}x - x^3 \ \mathrm{d}y$$

ao longo do círculo C de raio 2 centrado na origem e positivamente orientado de dois modos diferentes:

1. calculando a integral de caminho;
2. utilizando o Teorema de Green.

Ex. 5 — (2.5pt) Utilize o Teorema de Stokes para calcular a integral de caminho

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\ell$$

onde $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos z \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ e C é a curva determinada pela intersecção do plano $x + z = 2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Ex. 6 — (1.5pt) Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ duas funções a valores reais, de classe $\mathcal{C}^2$, no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ uma curva regular, fechada, simples, orientada no sentido anti-horário, fronteira de um compacto K, com interior não vazio e contido em Ω. Seja $\mathbf{n}$ a normal exterior a K. Prove a Segunda Identidade de Green:

$$\oint_\gamma \Big(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \Big) ds = \int\!\!\int_K (f \Delta g - g \Delta f) \ dxdy$$