Nome: **Ra:**

Prova 2
Análise Real

Prof.: Daniel

Avisos:

- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- Resolva as questões na ordem que melhor lhe convier. Mas explicite que questão ou item você está resolvendo.
- É terminantemente proibido consultar qualquer material ou colega.

Exercícios.

Parte em sala de Aula

1 — (2pt)

a) Defina formalmente função contínua

b) Prove que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todos os pontos do domínio.

c) Determine e mostre em quais pontos a seguinte função é contínua

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ \sin|x| & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

2 — (2pt) A oscilação de uma função $f : X \to R$ num conjunto bola aberta em x_o de raio δ é definido como:

$$\omega_f(x_0, \delta) := \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,|x_1 - x_0| < \delta \text{ e } |x_2 - x_0| < \delta\}$$

e a oscilação num ponto como

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(x_0, \delta).$$

Mostre o critério de Cauchy para a continuidade de funções:

"Uma função é contínua em x_0 se e somente se $w_f(x_0) = 0$."

3 — (2pt) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$$

para todo x, y reais. Prove que f é constante.

4 — (2pt) Seja $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ tal que f', f'', f''' existam e sejam contínuas em $(-1,1)$. Assuma $f'(0) = f''(0) = 0$ mas $f'''(0) \neq 0$. Mostre que $f(0)$ não é mínimo local.

5 — (0.7pt) Prove que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injetora e continua é estritamente crescente ou decrescente.

6 — (2pt) Prove que um espaço métrico (X, d) é compacto se e somente se toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada.

Parte para Casa

7 — Prove que composta de funções contínuas é contínua.

8 — Seja f uma função infinitamente diferenciável em $[0,1]$ e suponha que para cada $x \in [0,1]$ existe número inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$. Então f coincide em $[0,1]$ com algum polinômio?

9 — Prove que:

a) existe uma função contínua que se anula no conjunto de Cantor.

b) existe uma função diferencíavel que se anula no conjunto de Cantor.

10 — Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e que satisfaz:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

prove que existe α tal que $f(x) = \alpha x$

11 — Seja f uma função que tem terceira derivada contínua em $[0,1]$. Suponha que $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'(1) = f''(1) = 0$ e $f(1) = 1$.Prove que existe c em $[a,b]$ tal que $f'''(c) \geq 24$.

12 — Seja $I \subset \mathbb{R}$ compacto e conexo. Prove que existem a e b tais que $I = [a,b]$.

13 — Suponha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

14 — Suponha f definida numa vizinhança de x e suponha que $f''(x)$ exista. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

15 — Prove que se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona então o número de descontinuidades de f é enumerável.

16 — Mostre que dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ fixos, o resto da série de Taylor da função $\cos(x)$ centrada em x e calculada em y converge para zero quando $n \to \infty$.

Dicas:

7- Use a definição por abertos de continuidade.

8 - Cuidado. Suponha que f não é um polinômio.

Considere os seguintes conjuntos fechados: $F_n = x : f(n)(x) = 0$ e

$$X = \{x : \forall (a, b) \text{ contendo } x : f|_{(a,b)} \text{ não é uma polinomial}\}$$

É claro que X é um conjunto fechado não-vazia, sem pontos isolados. Aplicando o teorema de categoria de Baire...

9. a.) Use distância ao conjunto de Cantor C

$$d(x, C) = \inf d(x, y, y \in C.$$

b.) Eleve ao quadrado....

11. Taylor em dois pontos...

14. Taylor com cuidado...

Boa Prova.