Nome: **Ra:**

Prova 2 A
CVT

Avisos:

- Justifique todas suas respostas.
- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É terminantemente proibido consultar qualquer material ou colega, usar celular ou calculadora.

Ex. 1 — (2pt) Calcular a área da porção do paraboloide $x^2 + z^2 = 2ay$ cortada pela plano $y = a$.

Ex. 2 — (3.5pt) A transformação que relaciona as coordenadas cartesianas x, y com $x > 0$ às coordenadas cilíndricas parabólica u, v é dada pela equações

$$x = uv \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right) \quad (2)$$

$$z = z \quad (3)$$

1. Mostre que uma curva $u =$ constante representa uma parábola, e que curva $v =$ constante também representa metade de um ramo de uma parábola
2. Calcule o comprimento do arco ds^2
3. Mostre que esse sistema de coordenadas é ortogonal.
4. Calcule os fatores de escala h_u e h_v
5. Calcule o tensor métrico.
6. Calcule o símbolo de Cristoffel Γ^2_{22}
7. Escreva a expressão para o divergente neste sistema de coordenadas.
8. Calcule o divergente de $u\hat{\mathbf{e}}_u$

Ex. 3 — (1.5 pt) Prove que a contração pr de A^{ph}_r é um vetor.

Ex. 4 — (1.5 pt) Use notação indicial para provar que:
$\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$

Ex. 5 — (3pt)

1. Descreva como um campo contravariante troca de coordenadas.
2. Um tensor contravariante tem componentes

$$xy, 2y - z^2, z$$

em coordenadas retangulares. Encontre suas componentes em coordenadas esféricas.

Fórmulas Úteis

$$
\begin{aligned}
\nabla\Phi &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}+\frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}+\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]\\
\operatorname{curl}\mathbf{A} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\mathbf{e}}_1 & h_2\hat{\mathbf{e}}_2 & h_3\hat{\mathbf{e}}_3\\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}\\
\nabla^2\Phi &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1})+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2})+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3})\right]
\end{aligned}
$$

$$g_{ij}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^j} \tag{4}$$

$$g^{ik}g_{kj}=\delta^i{}_j \qquad \& \qquad g_{ik}g^{kj}=\delta_i{}^j \tag{5}$$

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{g^{kl}}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \tag{6}$$

Identidade ϵ-δ:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

Mudança de Bases para Campos Tensoriais

Dados $\{u^1,u^2,\ldots,u^n\}$ e $\{\bar{u}^1,\bar{u}^2,\ldots,\bar{u}^n\}$ dois sistemas de coordenadas e T um tensor. Então

$$\hat{T}^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}(\bar{u}^1,\ldots,\bar{u}^n)=\frac{\partial\bar{u}^{i'_1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\frac{\partial\bar{u}^{i'_p}}{\partial u^{i_p}}\frac{\partial u^{j_1}}{\partial\bar{u}^{j'_1}}\cdots\frac{\partial u^{j_q}}{\partial\bar{u}^{j'_q}}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(u^1,\ldots,u^n).$$