

Nome:

Ra:

## Prova 2 CVT

### Avisos:

- Justifique todas suas respostas.
- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É terminantemente proibido consultar qualquer material ou colega, usar celular ou calculadora.

**Ex. 1 — (4pt)** A transformação que relaciona as coordenadas cartesianas  $x, y, z$  às coordenadas cilíndricas elípticas  $u, v, z$  é dada pela equações

$$x = \cosh u \cos v, \quad y = \sinh u \sin v, \quad z = z$$

$$(u \geq 0, 0 \leq v < 2\pi).$$

1. Mostre que no plano  $xy$  uma curva  $u = \text{constante}$  representa uma elipse, Enquanto que uma curva  $v = \text{constante}$  representa metade de um ramo de uma hipérbole.
2. Calcule o comprimento do arco  $ds^2$
3. Mostre que esse sistema de coordenadas é ortogonal.
4. Calcule os fatores de escala  $h_u, h_v$  e  $h_z$
5. Calcule grad, div e rotacional neste sistema de coordenadas.

**Ex. 2 — (2pt)** Prove que se um tensor é simétrico com respeito as coordenadas  $p$  e  $q$  num sistema de coordenadas, ele será simétrico com respeito as coordenadas  $p$  e  $q$  em qualquer sistema de coordenadas.

**Ex. 3 — (2pt)** Use notação indicial para provar que:

1.  $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$
2.  $\nabla \times (u \times v) = (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v + u \nabla \cdot v - v \nabla \cdot u.$

**Ex. 4 — (3pt)**

1. Defina um campo tensorial do tipo  $(1, 0)$  e do tipo  $(0, 1)$  sem usar coordenadas.
2. Descreva como esses campos trocam de coordenadas.
3. Um tensor covariante tem componentes  $xy, 2y - z^2, xz$  em coordenadas retangulares. Encontre suas componentes em coordenadas esféricas.