Exercícios de Extensões Algébricas - E2 - Data de entrega: 03/05/2018

1. (a) Seja L/K extensão de corpos finita. Mostre que $L = K(\theta)$ para algum $\theta \in L$ se e somente se existe um número finito de corpos intermediários distintos entre K e L.

   (b) Seja K corpo infinito de característica $p > 0$ e suponha $L = K(u, v)$ com $u^p \in K, v^p \in K$ e $[L : K] = p^2$. Mostre que existe um número infinito de corpos intermediários distintos entre K e L. (Um exemplo explícito desta condição seria tomando $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ e $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p)$, $\mathbb{F}_p$ corpo finito com p elementos. Observe também que o exercício permite: (i) construir extensões finitas que não possuem elemento primitivo! e (ii) L/K é uma extensão não separável finita!)

2. Mostre que o polinômio $x^4 - px^2 + q \in \mathbb{Q}[x]$ é irredutível para quaisquer inteiros primos ímpares distintos p, q e ele possui como grupo de Galois o grupo dihedral de ordem 8.

3. Seja E/F extensão de corpos, $\alpha, \beta \in E$. Suponha que α seja elemento transcendente sobre F, mas α seja algébrico sobre $F(\beta)$. Prove que β é algébrico sobre $F(\alpha)$.