Lista 2 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Modelo Probabilístico

1 — Uma urna contém 3 bolas, uma vermelha, uma verde e uma azul.

a) Considere o seguinte experimento. Retire uma bola da urna, devolva-a e retire uma segunda bola. Descreva o espaço amostral.

b) Repita o exercício no caso em que a primeira bola retirada não é devolvida.

2 — Proponha o espaço amostral para os seguintes experimentos

a) Uma moeda é lançada duas vezes.

b) Um dado e uma moeda são lançados simultaneamente

c) Uma caneca cai de uma mesa.

d) Duas cartas são retiradas de um baralho de 52 cartas.

e) Um pacote de seis cartas numeradas é embaralhado e os números são revelados um a um.

f) Lançar uma moeda até sair cara.

g) Que horas seu relógio mostra agora.

3 — Dois dados são lançados. Seja E o evento em que a soma dos dados é impar; seja F o evento em que pelo menos um dos números na face virada para cima seja 1; e seja G o evento em que a soma é 5. Descreva os eventos $E \cap F$, $E \cup F$, $F \cap G$, $E \cap F^{\complement}$, e $E \cap F \cap G$.

4 — Um dado é lançado sucessivas vezes até aparecer um 6 na face virada para cima. Neste instante o experimento finaliza. Qual é o espaço amostral deste experimento? Seja E_n o evento em que n lançamentos são necessários para completar o experimento. Que evento representa $\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^{\complement}$?

5 — Um sistema está formado por 5 componentes, cada uma das quais está em funcionamento ou com falha. Considere o experimento que consiste em observar o estado de cada componente. Assuma que o resultado do experimento está dado por um vetor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, onde x_i é igual a 1 se a i-ésima componente está funcionando e igual a 0 caso contrário.

a) Qual a cardinalidade do espaço amostral deste experimento.

b) Assuma que o sistema estará em funcionamento caso as componentes 1 e 2 estejam funcionando, ou se as componentes 3 e 4 estão funcionando ou se as componentes 1, 3 e 5 estão funcionando. Seja W o evento em que o sistema está funcionando. Especifique os pontos amostrais de W.

c) Seja A o evento em que as componentes 4 e 5 falham. Qual a cardinalidade deste evento?

d) Escreva todos os pontos amostrais do

evento $A \cap W$.

6 — O administrador de um hospital codifica os pacientes vítimas de arma de fogo que ingressam na unidade hospitalar segundo tenham ou não plano de saúde (código 1 se tem cobertura e código 0 se não tiver) e de acordo a sua condição, que é avaliada como boa (b), razoável (r) ou péssima (p). Considere o experimento que consiste em codificar estes pacientes.

a) Descreva o espaço amostral deste experimento.

b) Seja A o evento em que o paciente está em uma condição péssima. Especifique os pontos amostrais de A.

c) Seja B o evento em que o paciente não tem um plano de saúde. Especifique os pontos amostrais de B.

d) Apresente todos os pontos amostrais do evento $B^{\complement} \cup A$.

7 — *Distribuição de objetos em cubículos.* Considere a estrutura do espaço amostral decorrente de alocar k objetos (bolas, etc.) em n cubículos (caixas, etc.) enumerados de 1 a n. Esta classe de problemas aparece, por exemplo, na Física Estatística quando é estudada a distribuição de k partículas (prótons, elétrons, etc.) entre n estados (que podem ser níveis de energia). Na física estatística dizemos que:

- as partículas distinguíveis e que não estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Maxwell-Boltzmann
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Bose-Einstein.
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão, dizemos que obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac.

Descreva o espaço amostral para estes modelos de alocação de partículas.

8 — Considere o experimento aleatório que consiste em observar os primeiros n movimentos de uma partícula que se desloca aleatoriamente no conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ dos números inteiros. A partícula começa sua trajetória na origem no instante 0 e a cada instante de tempo $1, 2, 3, \ldots$ a partícula se move aleatoriamente para a direita ou para a esquerda. Descreva o espaço amostral deste experimento.

9 — Descreva o espaço amostral quando o experimento consiste em observar a trajetória completa do passeio aleatório. Isto é, se observarmos seus movimentos em todos instante de tempo $n, n \in \mathbb{N}$.

10 — Considere uma urna que que contém M bolas enumeradas $1, 2, \ldots M$ onde M_1 bolas tem a cor $b_1, \ldots, M_r$ tem a cor b_r, e $M_1 + \cdots + M_r = M$. Suponha que retiramos uma amostra de tamanho $n < M$ sem substituição. Descreva o espaço amostral do experimento.

11 — Mostre as seguintes relações

a) $E \cap F \subset E \subset E \cup F$.

b) Se $E \subset F$ então $F^{\complement} \subset E^{\complement}$.

c) $F = (F \cap E) \cup F \cap E^{\complement})$, e $E \cup F = E \cup (E^{\complement} \cap F)$.

d) Para qualquer sequência de eventos $E_1, E_2, \ldots$ defina uma sequência de eventos $F_1, F_2, \ldots$ disjuntos dois a dois tais que para cada $n \geq 1$,

$$\cup_{i=1}^{n} E_i = \cup_{i=1}^{n} F_i.$$

12 — Sejam E, F e G três eventos. Encontre uma expressão para os seguintes eventos

a) Apenas o evento E ocorre.
b) Os eventos E e G ocorrem mas não o evento F.
c) Pelo menos um dos eventos ocorre.
d) Pelo menos dois dos eventos ocorrem.
e) Os três eventos ocorrem.
f) Nenhum dos eventos ocorre.
g) No máximo, um dos eventos ocorre.
h) No máximo, dois dos eventos ocorrem.
i) Exatamente dois dos eventos ocorrem.
j) No máximo, três dos eventos ocorrem.

13 — Suponha que um experimento é realizado n vezes. Para qualquer evento E do espaço amostral seja $n(E)$ o número de vezes que o evento E ocorre, e defina $f(E) = n(E)/n$. Mostre que $f(.)$ satisfaz os axiomas de uma probabilidade.

14 — Se $\mathbb{P}[E] = 0,9$ e $\mathbb{P}[F] = 0,8$ mostre que $\mathbb{P}[E \cap F] \geq 0,7$. Em geral, mostre a desigualdade de Bonferroni,

$$\mathbb{P}[E \cap F] \geq \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 1$$

15 — Mostre que a probabilidade de que exatamente um dos eventos E ou F ocorra é igual a $\mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 2\mathbb{P}[E \cap F]$.

16 — Prove que $\mathbb{P}[E \cap F^{\complement}] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F]$.

17 — Mostre que $A \subset B$ se e somente se $1_A \leq 1_B$; e que $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $1_A 1_B = 0$.

18 — Mostre que se $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ são duas probabilidades então $a\mathbb{P} + b\mathbb{Q}$ é uma probabilidade, onde $a, b \geq 0$ e $a + b = 1$. Forneça um exemplo concreto de uma mistura deste tipo.

19 — Se $\mathbb{P}$ é uma probabilidade, que axiomas satisfazem $\mathbb{P}/2$ e $\mathbb{P}^2$.

20 — Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de eventos.

a) Mostre que se $\mathbb{P}[A_n] = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ então $\mathbb{P}[\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n] = 1$.
b) Mostre que se $\mathbb{P}[A_n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ então $\mathbb{P}[\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n] = 0$.

* **21** — Mostre que $\mathbb{P}[E \cup F \cup G] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] + \mathbb{P}[G] - \mathbb{P}[E^{\complement} \cap F \cap G] - \mathbb{P}[E \cap F^{\complement} \cap G] - \mathbb{P}[E \cap F \cap G^{\complement}] - 2\mathbb{P}[E \cap F \cap G]$.

Respostas dos Exercícios

1 Se denotarmos uma bola vermelha por Va, uma verde por Ve e uma azul por A teremos que o espaço amostral será dado por:

a) $\Omega = \{(Va, Va), (Va, Ve), (Va, A), (Ve, Va), (Ve, Ve), (Ve, A), (A, Va), (A, Ve), (A, A)\}$

b) $\Omega = \{(Va, Ve), (Va, A), (Ve, Va), (Ve, A), (A, Va), (A, Ve)\}$

2 a) $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, onde 0 representa coroa e 1 representa cara.

b) $\Omega = \{(i, a) : i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, a \in \{0, 1\}\}$.

c) Há várias opções dependendo de qual seja o interesse de quem esteja observando o experimento.

i) $\Omega = \{S, N\}$ onde S representa que a caneca quebrou e N representa que a caneca não quebrou.

ii) $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$ se o interesse for em registrar o número de partes da caneca espalhados no chão após a queda.

iii) $\Omega = \{A, B, D, E\}$ se o interesse for em saber se após a queda a caneca ficou virada para Acima ou para Baixo; ou se a orelha da caneca ficou para Direita ou para Esquerda.

d) Se C denota o conjunto de cartas, então $\Omega = \{A : A \subset C \text{ e } |A| = 2\}$. Em outras palavras, Ω consiste de todos os subconjuntos de duas cartas de um baralho de 52 cartas.

e) O espaço amostral consiste de todas as permutações do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

f) Se registrarmos o número de lançamentos necessários até sair cara, $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$.

g) Se o relógio for um digital podemos tomar como espaço amostral $\Omega = \{(h, m, s) : h \in \Omega_h, m \in \Omega_m, s \in \Omega_s\}$, onde $\Omega_h = \{1, 2, \ldots 24\}, \Omega_m = \{0, 1, \ldots, 59\}$ e $\Omega_s = \{0, 1, \ldots, 59\}$.

3 O espaço amostral corresponde a este experimento é $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\} = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i = 1, 2\}$. Desta forma temos que

i) $E \cap F = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1)\}$.

ii) $E \cup F$ representa o evento em que a soma é impar ou pelo menos um dos dois números sorteados é o número 1.

iii) $F \cap G = \{(1, 4), (4, 1)\}$.

iv) $E \cap F^{\complement} = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\}$.

v) $E \cap F \cap G = F \cap G$.

4 Uma escolha de espaço amostral é dada por $\Omega = \{(n, x_1, \ldots, x_{n-1}), n \geq 2, x_i \neq 6, i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{1\}$ onde $(n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ representa a situação em que o número 6 foi sorteado pela primeira vez no n-ésimo lançamento e x_i representa o resultado do i-ésimo lançamento. O evento $\{1\}$ representa o evento no qual o número 6 é sorteado no primeiro lançamento.

O evento $\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^{\complement}$ representa o evento em que o número 6 nunca é sorteado.

5 a) $2^5 = 32$.

b) $W = \{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1)\}$.

c) 8.

d) $A \cap W = \{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0)\}$.

6 a) $\Omega = \{(1, b), (0, b), (1, r), (0, r), (1, p), (0, p)\}$.

b) $A = \{(1, p), (0, p)\}$.

c) $B = \{(0, b), (0, r), (0, p)\}$.

d) $B^{\complement} \cup A = \{(1, p), (0, p), (1, b), (1, r)\}$.

7 *Modelo de Maxwell-Boltzman.* Neste modelo de alocação de partículas em cubículos as partículas são distinguíveis e um cubículo pode comportar mais de uma partícula. Nestas condições o espaço amostral para este experimento é dado por $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) : 1 \leq \omega_i \leq n \ \forall\ i\}$, onde ω_i é o número do cubículo onde a i-ésima partícula é alocada. Note que $|\Omega| = n^k$.

Modelo de Fermi-Dirac. Neste modelo as partículas são consideradas indistinguíveis e ocupação múltipla de cubículos não é permitida. Neste caso, $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i = 0 \text{ou} 1\ \forall j \text{ e} \sum_{j=1}^{n} \omega_j = k\}$. Note que $|\Omega| = \binom{n}{k}$.

Modelo de Bose-Einstein. Neste modelo as partículas são indistinguíveis e ocupação múltipla dos cubículos é permitida. Neste caso, $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{n} \omega_j = k\}$, onde ω_j representa o número de partículas presentes no cubículo j. Note que $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k-1}$.

8 $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$ onde $\omega_i = -1$ representa um passo à esquerda no i-ésimo movimento e $\omega_i = 1$ representa um passo à direita no i-ésimo movimento.

9 $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} : \omega_i = -1 \text{ ou } 1, i \in \mathbb{N}\}$.

10 $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n) : a_k \neq a_l \text{ se } k \neq l, a_i = 1, 2, \ldots, M\}$. Note que $|\Omega| = (M)_m$.

11 d) $F_1 = E_1$ e $F_i = E_i \cap (\cap_{j=1}^{i-1} E_j^{\complement})$ para $i \geq 2$.

12 a) $E \cap F^{\complement} \cap G^{\complement}$.

b) $E \cap G \cap F^{\complement}$.

c) $E \cup F \cup G$.

d) $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$.

e) $E \cap F \cap G$.

f) $E^{\complement} \cap F^{\complement} \cap G^{\complement}$.

g) $(E^{\complement} \cap F^{\complement} \cap G^{\complement}) \cup (E \cap F^{\complement} \cap G^{\complement}) \cup (E^{\complement} \cap F \cap G^{\complement}) \cup (E^{\complement} \cap F^{\complement} \cap G)$

h) $(E \cap F \cap G)^{\complement}$.

i) $(E \cap F \cap G^{\complement}) \cup (E \cap F^{\complement} \cap G) \cup (E^{\complement} \cap F \cap G)$.

j) Ω.

13 $f(.)$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) $f(E) \geq 0$ para qualquer evento E já que $n(E) \geq 0$.

ii) Se $A \cap B = \emptyset$ então $f(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{n(A)+n(B)}{n} = f(A) + f(B)$.

iii) $f(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

14 Sendo que $1 \geq \mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$ concluímos que $\mathbb{P}[E \cap F] \geq \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 1$.

15 O evento $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ representa o evento em que só um dos eventos E ou F ocorre. Logo, $\mathbb{P}[E \Delta F] = \mathbb{P}[E \setminus F] + \mathbb{P}[F \setminus E] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$.

16 Sendo que $E \cap F^{\complement} = E \setminus (E \cap F)$ e que $E \cap F \subset E$ concluímos que, $\mathbb{P}[E \cap F^{\complement}] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F]$.

17 Assuma que $A \subset B$. Seja $\omega \in \Omega$. Tem-se três casos.

i) Se $\omega \in A$ então $\omega \in B$ e neste caso tem-se que $1_A(\omega) = 1_B(\omega) = 1$.

ii) Se $\omega \in B \setminus A$ então $1_A(\omega) = 0 < 1 = 1_B(\omega)$.

iii) Se $\omega \in B^{\complement}$ então $1_A(\omega) = 1_B(\omega) = 0$.

Concluímos que $1_A \leq 1_B$.

Agora assuma que $1_A \leq 1_B$. Seja $\omega \in A$. Logo, $1 = 1_A(\omega) \leq 1_B(\omega) \leq 1$. Portanto $1_B(\omega) = 1$; ou, de forma equivalente, $\omega \in B$.

18 Comecemos notando que para qualquer evento E, $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E) = a\mathbb{P}(E) + b\mathbb{Q}(E)$. Logo,

i) Do fato que $\mathbb{P}(E), \mathbb{Q}(E) \geq 0$ para qualquer evento E segue-se que $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E) \geq 0$.

ii) Se E, F são dois eventos disjuntos temos que $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E \cup F) = a\mathbb{P}(E \cup F) + b\mathbb{Q}(E \cup F) = a(\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}((F)) + b(\mathbb{Q}(E) + \mathbb{Q}) = (a\mathbb{P}(E) + b\mathbb{Q}(E)) + (a\mathbb{P}(F) + b\mathbb{Q}(F))$.

iii) $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(\Omega) = a\mathbb{P}(\Omega) + b\mathbb{Q}(\Omega) = a.1 + b.1 = 1$.

19 $\mathbb{P}/2$ satisfaz os axiomas i e ii já que

i) $\mathbb{P}/2(E) = \frac{\mathbb{P}(E)}{2} \geq 0$ para qualquer evento E e,

ii) se E, F são dois eventos disjuntos então $\mathbb{P}/2(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup F)/2 = \frac{\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)}{2} = \mathbb{P}/2(E) + \mathbb{P}/2(F)$.

$\mathbb{P}^2$ satisfaz os axiomas i e iii já que

i) $\mathbb{P}^2(E) \geq 0$ para qualquer evento E e

iii) $\mathbb{P}^2(\Omega) = 1^2 = 1$.

20 Assuma que $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para qualquer n. Sendo que $0 \leq \mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 0$ concluímos que $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$.

Para concluir o exercício note que $\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = 1 - \mathbb{P}((\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n)^{\complement}) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n^{\complement})$ e que se $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para todo n então $\mathbb{P}(A_n^{\complement}) = 0$ para todo n.

21 Verifique que $E\cup F\cup G = A\cup B\cup C$ com A, B, C disjuntos dois a dois onde $A = E\setminus((E\cap F^{\complement}\cap G)\cup(E\cap F\cap G))$, $B = F\setminus((E\cap F\cap G^{\complement})\cup(E\cap F\cap G))$ e $C = G\setminus(G\cap F\cap E^{\complement})$. Logo aplique as propriedades de uma probabilidade.

Outra solução:

Pelo Principio de Inclusão exclusão:

$P(E\cup F\cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E\cap F) - P(E\cap G) - P(F\cap G) + P(E\cap F\cap G)$

Agora use que

$$E\cap F = (E\cap F\cap G^{c})\cup(E\cap F\cap G)$$

$$E\cap G = (E\cap G\cap F^{c})\cup(E\cap G\cap F)$$

$$F\cap G = (F\cap G\cap E^{c})\cup(F\cap G\cap E).$$

e assim

$$P(E\cap F) = P(E\cap F\cap G^{c}) + P(E\cap F\cap G)$$

$$P(E\cap G) = P(E\cap G\cap F^{c}) + P(E\cap G\cap F)$$

$$P(F\cap G) = P(F\cap G\cap E^{c}) + P(F\cap G\cap E).$$

Somando

$$P(E\cap F) + P(E\cap G) + P(F\cap G) =$$

$$P(E\cap F\cap G^{c}) + P(E\cap F\cap F^{c}) + P(F\cap G\cap E^{c}) + 3P(E\cap F\cap G),$$

Agora substitua na fórmula de inclusão exclusão.