UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 7 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

1 — Lança-se, simultaneamente, uma moeda e um dado. Os resultados possíveis são dados pela tabela abaixo:

Moeda\Dado	1	2	3	4	5	6
cara	(cara,1)	(cara,2)	(cara,3)	(cara,4)	(cara,5)	(cara,6)
coroa	(coroa,1)	(coroa,2)	(coroa,3)	(coroa,4)	(coroa,5)	(coroa,6)

Considere que tanto a moeda quanto o dado são honestos e, portanto, este espaço amostral é equiprovável.

a) Obtenha a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X (número de caras no lançamento da moeda) e Y (número da face do dado voltada para cima);

b) Obtenha as distribuições marginais de X e de Y.

c) Verifique se X e Y são independentes;

d) Calcule, através das tabelas, P(X=2,Y=3), P(X=1), P(X<2), P(X>-1,Y<5), P(X=0,Y>0). (0, 1/2, 1, 2/3, 1/2)

2 — Considere a distribuição conjunta de X e Y.

Y\X	1	2	3
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0	0,3
2	0	0,1	0,1

a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.

c) Verifique se X e Y são independentes.

d) Calcule P(X=1|Y=0) e P(Y=2|X=3)

3 — Suponha que 3 bolas sejam sorteadas de uma urna contendo 3 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 5 bolas azuis. Se X e Y representam, respectivamente, o número de bolas vermelhas e brancas escolhidas, calcule:

a) a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y;

b) a distribuição marginal de cada variável aleatória X e Y;

c) todas as distribuições condicionais entre X e Y.

4 — Com base nas tabelas obtidas nos itens anteriores, calcule:

a) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha e 2 brancas;

b) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha;

c) a probabilidade de sortearmos 2 brancas. As variáveis X e Y são independentes?

d) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha e 2 brancas ou 1 branca e 2 vermelhas;

e) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha ou 2 brancas;

f) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha, dado que as outras 2 bolas sorteadas são brancas;

g) a probabilidade de sortearmos 2 brancas, dado que a outra bola sorteadas é vermelha;

h) o valor esperado de sortearmos bolas vermelhas;

i) o valor esperado de sortearmos bolas brancas;

j) o valor esperado de sortearmos bolas vermelhas, dado que sorteamos 2 brancas;

k) o valor esperado de sortearmos bolas brancas, dado que sorteamos 1 bola vermelha.
Definimos a variável aleatória S que é a soma do número de bolas vermelhas com o número de bolas brancas e a variável P que é o produto do número de bolas vermelhas com o número de bolas brancas. Calcule

l) o valor esperado da variável aleatória S;

m) o valor esperado da variável aleatória P;

n) a distribuição da variável aleatória S;

o) a distribuição da variável aleatória P.

p) Verifique que $\mathsf{E}[\mathsf{S}] = \mathsf{E}[\mathsf{X}] + \mathsf{E}[\mathsf{Y}]$

q) Verifique que $\mathsf{E}[\mathsf{P}] \neq \mathsf{E}[\mathsf{X}]\mathsf{E}[\mathsf{Y}]$. Porque isso já era esperado?

r) Calcule a correlação entre X e Y. X e Y se relacionam de forma linear?

5 — Suponha que X e Y tenham a seguinte distribuição conjunta

Y\X	1	2	3
1	0,1	0,1	0,0
2	0,1	0,2	0,3
3	0,1	0,1	0,0

a) Determine a distribuição da variável $\mathsf{S} = \mathsf{X} + \mathsf{Y}$ e calcule E(S). Pode-se obter a mesma resposta de outra maneira?

b) Determine a distribuição da variável $\mathsf{P} = \mathsf{XY}$ e, em seguida, calcule $\mathsf{E}[\mathsf{P}]$.

c) Mostre que, embora $\mathsf{E}\,(XY) = \mathsf{E}.$, X e Y não são independentes.

d) Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o número obtido no primeiro dado e Y o maior ou o número comum nos dois dados.

e) Determine a distribuição conjunta de X e Y.

f) As duas variáveis são independentes? Porque?

g) As duas variáveis são correlacionadas? Porque?

6 — O exemplo a seguir ilustra que correlação nula NÃO implica independência. Suponha que X e Y tenham a seguinte distribuição conjunta

Y\X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

a) Mostre que $\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$, o que implica que $\mathrm{corr}[X, Y] = 0$.

b) Justifique porque X e Y não são independentes.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

7 — A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por $f(x, y) = c(x^2 - y^2)e^{-y} \quad -y \leq x \leq y \quad 0 < y < \infty$

a) Determine c.

b) Determine as densidades marginais de X e Y.

c) Determine $\mathsf{E}[X]$

8 — A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty$$

Determine

a) $P[X < Y]$

b) $P[X < a]$

9 — O vetor aleatório (X, Y) é chamado de uniformemente distribuído em uma região R do plano se, para alguma constante c, sua densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{se}(x, y) \in R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso contrário

a) Mostre que $1 \overline{\overline{\,}}_{\mathfrak{s}}$ área da região R. Suponha que (X, Y) seja uniformemente distribuído ao longo do quadrado centrado em (O, O) e com lados de comprimento 2.

b) Mostre que X e Y são independentes, com cada um sendo uniformemente distribuído ao longo de (-1,l). (c) Qual é a probabilidade de que (X, Y) esteja contido no círculo de raio 1 centrado na origem? Isto é, determine

$$P[x^2 + y^2 < 1]$$

10 — A pontuação de Carlos no boliche é normalmente distribuída com média 170 e desvio padrão 20, enquanto a de Sebastião é normalmente distribuída com média 160 e desvio padrão 15. Se Carlos e Sebastião jogam um jogo cada, obtenha, supondo que suas pontuações sejam variáveis aleatórias independentes, a probabilidade aproximada de que

a) a pontuação de Carlos seja maior.

b) o total de seus pontos supere 350.

Covariância

11 — Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Definimos a covariância entre X e Y por $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$. Mostre que

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
2. $Cov(X, X) \geq 0$.
3. $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$.
4. $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$.
5. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$.
6. Se X e Y são independentes, então $Cov(X, Y) = 0$
7. $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

12 — Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Definimos o índice de correlação entre X e Y por

$$\rho(X, Y) = \mathbb{E}\left[\frac{(X - \mathbb{E}[X])}{\sqrt{Var(X)}} \frac{(Y - \mathbb{E}[Y])}{\sqrt{Var(Y)}}\right].$$

O índice correlação tem a seguinte propriedade

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

Mostre que $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$