Álgebra Linear - 2019.1

Lista 6- Matriz mudança de base - Transfromações Lineares e Matrizes

1) Sejam $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}, B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ e $B_3 = \{(-1,2),(-2,1)\}$. Exiba as matrizes mudança de base:

(a) da base B_2 para a base B_1.

Solução

Queremos determinar a matriz P de mudança da base B_2 para a base B_1. Para tal, vamos escrever os elementos da base B_2 como combinação linear dos elementos da base B_1, isto é:

$$(1,1) = a_1(1,0) + a_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

e

$$(2,3) = b_1(1,0) + b_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \end{cases}.$$

Portanto,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) da base B_1 para a base B_3.

Solução

Queremos determinar a matriz Q de mudança da base B_1 para a base B_3. Para tal, vamos escrever os elementos da base B_1 como combinação linear dos elementos da base B_3, isto é:

$$(1,0) = a_1(-1,2) + a_2(-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 - 2a_2 = 1 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

e

$$(0,1) = b_1(-1,2) + b_2(-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 - 2b_2 = 0 \\ 2b_1 + b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{2}{3} \\ b_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Portanto,

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(c) da base B_2 para a base B_3.

Solução

Queremos determinar a matriz R de mudança da base B_2 para a base B_3. Para tal, vamos escrever os elementos da base B_2 como combinação linear dos elementos da base B_3, isto é:

$$(1,1) = a_1(-1,2) + a_2(-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 - 2a_2 = 1 \\ 2a_1 + a_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

e

$$(2,3) = b_1(-1,2) + b_2(-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 - 2b_2 = 2 \\ 2b_1 + b_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{8}{3} \\ b_2 = -\frac{7}{3} \end{cases}.$$

Portanto,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{3} \\ -1 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

2) Quais são as coordenadas do vetor $v = (2, -3)$ em relação às bases B_1, B_2 e B_3?

Solução

Para determinarmos $[v]_{B_1}$ vamos escrever v como combinação linear dos vetores da base B_1, isto é:

$$(2, -3) = 2(1, 0) - 3(0, 1) \Rightarrow [v]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Para determinarmos $[v]_{B_2}$ vamos escrever v como combinação linear dos vetores da base B_2, isto é:

$$(2, -3) = a_1(1, 1) + a_2(2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 2 \\ a_1 + 3a_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 12 \\ a_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow [v]_{B_2} = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Para determinarmos $[v]_{B_3}$ vamos escrever v como combinação linear dos vetores da base B_3, isto é:

$$(2, -3) = b_1(-1, 2) + b_2(-2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 - 2b_2 = 2 \\ 2b_1 + b_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{4}{3} \\ b_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow [v]_{B_3} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

3) As coordenadas de uma vetor w em relação à base B_2 são dadas por:

$$[w]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Quais são as coordenadas de w em relação às bases B_1 e B_3.

Solução

Temos que a matriz mudança da base B_2 para a base B_1 é:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[w]_{B_1} = P\,[w]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Também, temos que a matriz mudança da base B_2 para a base B_3 é:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{3} \\ -1 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[w]_{B_3} = R\,[w]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{3} \\ -1 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

4) Considere V o espaço vetorial de matrizes 2×2 e duas bases das matrizes triangulares superiores

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Encontre a matriz de mudança da base β_2 para a base β_1.

Solução

Queremos determinar a matriz A de mudança da base β_2 para a base β_1. Para tal, vamos escrever os elementos da base β_2 como combinação linear dos elementos da base β_1, isto é:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 = 1\\a_2 = 0\\a_3 = 0\end{cases},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}b_1 = 1\\b_2 = 1\\b_3 = 0\end{cases},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}c_1 = 1\\c_2 = 1\\c_3 = 1\end{cases}.$$

Portanto,

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$.

Encontre as matrizes de T com relação à base canônica, C, e em relação à base B formada pelos vetores: $u = (1, 1, 2), v = (-1, 1, 0)$ e $w = (-1, -1, 1)$.

Solução

Primeiramente vamos determinar $[T]_C$. Temos que:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1),$$
$$T(0, 1, 0) = (0, 1, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1),$$
$$T(0, 0, 1) = (1, 1, 2) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1).$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Agora determinemos $[T]_B$. Temos que:

$$T(1, 1, 2) = (3, 3, 6) = 3(1, 1, 2) + 0(-1, 1, 0) + 0(-1, -1, 1),$$
$$T(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) = 0(1, 1, 2) + 1(-1, 1, 0) + 0(-1, -1, 1),$$
$$T(-1, -1, 1) = (0, 0, 0) = 0(1, 1, 2) + 0(-1, 1, 0) + 0(-1, -1, 1).$$

Portanto,

$$[T]_B = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

6. Seja $T \in L(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ dada por $T(p) = \int_0^1 p(x)dx$. Encontre as matrizes de T em relação às bases canônicas de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$

Solução

Queremos determinar a matriz M de T em relação às bases $B = \{1, x, x^2\}$ e $C = \{1\}$, de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$, respectivamente. Para tal, calculemos

$$T(1) = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1,$$
$$T(x) = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$T(x^2) = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Portanto,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador lienar tal que

$$T(e_1) = (2,3,1), T(e_1 + e_2) = (5,2,7) \text{ e } T(e_1 + e_2 + e_3) = (-2,0,7).$$

(a) Encontre $T(x,y,z)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Solução

Temos que,

$T(e_1) = (2,3,1)$,

$T(e_1 + e_2) = T(e_1) + T(e_2) = (5,2,7) \Rightarrow T(e_2) = (5,2,7) - (2,3,1) = (3,-1,6)$,

$T(e_1 + e_2 + e_3) = T(e_1 + e_2) + T(e_3) = (-2,0,7) \Rightarrow T(e_3) = (-2,0,7) - (5,2,7) = (-7,-2,0)$.

Uma vez que

$$(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

apliquemos a transformação linear T em ambos os lados da igualdade acima, obtendo

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) \\ &= x(2,3,1) + y(3,-1,6) + z(-7,-2,0) \\ &= (2x,3x,x) + (3y,-y,6y) + (-7z,-2z,0) \\ &= (2x + 3y - 7z, 3x - y - 2z, x + 6y). \end{aligned}$$

(b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

Solução

Sim, pois $\beta = \{(2,3,1),(3,-1,6),(-7,-2,0)\}$ é uma base para $Im(T)$ e como a $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, temos que β também é uma base para $\mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejetora.

(c) T é injetora? Justifique sua resposta.

Solução

Sim, pois pelo Teorema do Núcleo e da Imagem , temos que

$dim(\mathbb{R}^3) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow 3 = dim(Ker(T)) + 3 \Rightarrow dim(Ker(T)) = 0 \Rightarrow Ker(T) = \{(0,0,0)\}$.

Portanto, T é injetora.

(d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Sim, pelos itens (b) e (c).

O exercício foi resolvido encontrando uma base para a imagem e utilizando um teorema importante que sempre tem que ser considerado nestes casos. Agora, tente resolver usando uma representação em uma base da transformação linear e o fato de que as dimensões podem ser calculadas com o posto e a nulidade desta matriz.

8. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$(T(p_0))(t) = 1 + t, (T(p_1(t))(t) = t + t^2 \text{ e } (T(p_2))(t) = 1 + t - t^2,$$

onde $p_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2$.

(a) Encontre $T(p)$ para $p \in P_2(\mathbb{R})$.

Solução

Temos que

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 = a_0(1) + a_1(t) + a_2(t^2).$$

Aplicando a tranformação linear T em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} T(a_0 + a_1t + a_2t^2) &= a_0T(1) + a_1T(t) + a_2T(t^2) \\ &= a_0(1 + t) + a_1(t + t^2) + a_2(1 + t - t^2) \\ &= a_0 + a_2 + (a_0 + a_1 + a_2)t + (a_1 - a_2)t^2. \end{aligned}$$

(b) T é sobrejetora? Justifique a resposta.

Solução

Sim, pois $\beta = \left\{1+t, t+t^2, 1+t-t^2\right\}$ é uma base para $Im(T)$ e como a $dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, temos que β também é uma base para $P_2(\mathbb{R})$, isto é, T é sobrejetora.

(c) T é injetora? Justifique sua resposta.

Solução

Sim, pois pelo Teorema do Núcleo e da Imagem , temos que

$dim(P_2(\mathbb{R})) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow 3 = dim(Ker(T)) + 3 \Rightarrow dim(Ker(T)) = 0 \Rightarrow Ker(T) = \{0\}$.

Portanto, T é injetora.

(d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Solução

Sim, pelos itens (b) e (c).

O exercício foi resolvido encontrando uma base para a imagem e utilizando um teorema importante que sempre tem que ser considerado nestes casos. Agora, tente resolver usando uma representação em uma base da transformação linear e o fato de que as dimensões podem ser calculadas com o posto e a nulidade desta matriz.

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz na base $B = \{(1,0),(1,4)\}$ é

$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Solução

Denotemos por $C = \{(1,0),(0,1)\}$ à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Para determinar $[T]_C$ devemos aplicar a fórmula $[T]_C = P^{-1}[T]_B P$, em que P é a matriz de mudança da base C para a base B. Calculemos P.

$$(1,0) = a_1(1,0) + a_2(1,4) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ 4a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases},$$

$$(0,1) = b_1(1,0) + b_2(1,4) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ 4b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -\dfrac{1}{4} \\ b_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Logo,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$[T]_C = P^{-1}[T]_B P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}.$$

10. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base do espaço vetorial V. Se $T, S : V \to V$ são operadores lineares em V tais que

$$T(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3,\ T(e_2) = e_1 + e_2,\ T(e_3) = e_2 + e_3$$

e

$$S(e_1) = 3e_1 + 2e_2,\ S(e_2) = e_1 - e_2 - e_3,\ S(e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3.$$

Determinar as seguintes matrizes: $[T]_B$, $[S]_B$, $[S \circ T]_B$, $\left[S^2 + I\right]_B$ e $\left[T^3 - S^2\right]_B$.

Solução

Temos que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [S]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$[S \circ T]_B = [S]_B\,[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\left[S^2 + I\right]_B = [S]_B^2 + [I]_B = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\left[T^3 - S^2\right]_B = [T]_B^3 - [S]_B^2 = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -8 & -10 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 3 & 2 \\ -12 & -12 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Considere a transformação linear $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, onde $D(p) = p'$.
(a) Escreva D na forma matricial em relação à base canônica $\{t^3, t^2, t, 1\}$.

Solução

Temos que:

$$\begin{aligned} D(t^3) &= 3t^2 = 0(t^3) + 3(t^2) + 0(t) + 0(1), \\ D(t^2) &= 2t = 0(t^3) + 0(t^2) + 2(t) + 0(1), \\ D(t) &= 1 = 0(t^3) + 0(t^2) + 0(t) + 1(1), \\ D(1) &= 0 = 0(t^3) + 0(t^2) + 0(t) + 0(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$[D]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Determine $Ker(D)$ e $Im(D)$ e encontre uma base para cada um destes subespaços. Verifique o teorma do núcleo e da imagem.

Solução

Seja $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ em $P_3(\mathbb{R})$. Logo,

$$D(p) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 = a_3(3t^2) + a_2(2t) + a_1(1).$$

Assim,

$Ker(D) = [\{1\}]$ e $\beta_1 = \{1\}$ é uma base para o $Ker(D)$.

$Im(D) = \left[\{3t^2, 2t, 1\}\right]$ e $\beta_2 = \{3t^2, 2t, 1\}$ é uma base para $Im(D)$.

Note que vale o Teorema do Núcleo e da Imagem, pois $4 = dim\,(P_3(\mathbb{R})) = dim(Ker(D)) + dim(Im(D)) = 1 + 3 = 4$.

(c) Mostre que $D \circ D \circ D \circ D = \mathbf{0}$. Primeiro usando a definição de derivada. Depois usando a representação matricial.

Solução

Seja $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ em $P_3(\mathbb{R})$. Então,

$$\begin{aligned} D(p(t)) &= 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1, \\ D^2(p(t)) &= 6a_3t + 2a_2, \\ D^3(p(t)) &= 6a_3, \\ D^4(p(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Agora usando a representação matricial, temos que:

$$[D]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, [D]_C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[D]_C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [D]_C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$