Introdução a Teoria dos Grupos – MAT 113 – Pós Mat – UFABC-QS2020.2

G age no conjunto A,

$\forall g \in G$, TEMOS UMA APLICAÇÃO $\sigma_g : A \longrightarrow A$ DEF

$$a \longmapsto g \cdot a \qquad \sigma_g(a) = g \cdot a$$

A APLICAÇÃO $\Phi : G \longrightarrow S_A$ def POR $\Phi(g) = \sigma_g$

$$g \longmapsto \Phi(g) : A \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto g \cdot a$$

É UM HOMOMORFISMO

Φ É REPRESENTAÇÃO POR PERMUTAÇÃO ASSOCIADA

A AÇÃO DE GRUPO DE G SOBRE A.

GRUPOS AGINDO EM SI MESMO POR MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA:

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, a) \mapsto g \cdot a = ga$$

Se G é finito, denote $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ enumeramos os elementos de G por $1, 2, \ldots, n$.

PARA CADA $g \in G$, A PERMUTAÇÃO σ_g PODE SER DESCRITA COMO UMA PERMUTAÇÃO DOS ÍNDICES $1, 2, \ldots, n$ DA SEGUINTE MANEIRA:

$$\sigma_g(i) = j \iff g \cdot g_i = g_j$$

Ex: SEJA $G = \{1, a, b, c\}$ GRUPO 4 DE KLEIN. ENUMERE OS ELEMENTOS DE G COMO OS NÚMEROS 1, 2, 3, 4, RESPECTIVAMENTE. CALCULAMOS σ_a

$a \cdot 1 = a1 = a \longrightarrow \sigma_a(1) = 2$
$a \cdot a = aa = a^2 = 1 \longrightarrow \sigma_a(2) = 1$
$a \cdot b = ab = c \longrightarrow \sigma_a(3) = 4$
$a \cdot c = ac = b \longrightarrow \sigma_a(4) = 3$

$\therefore \sigma_a = (1\,2)(3\,4)$

Analogamente $\sigma_b = (1\,3)(2\,4)$ $\quad \sigma_c = (1\,4)(2\,3)$

REPRESENTAÇÃO POR PERMUTAÇÃO: $a \mapsto \sigma_a$; $b \mapsto \sigma_b$, $c \mapsto \sigma_c$

GRUPOS AGINDO NO CONJUNTO DAS CLASSES LATERAIS À ESQUERDA

$\underline{H \leq G}.$

$$G \times \{aH : a \in G\} \longrightarrow \{aH : a \in G\}$$

$$(g, aH) \longmapsto g \cdot aH := gaH.$$

Se $[G:H] = m < \infty$, podemos ENUMERAR AS CLASSES LATERAIS À ESQUERDA DE H COM OS NÚMEROS $1, 2, \dots, m$. A FIM DE DESCREVER A REPRESENTAÇÃO POR PERMUTAÇÃO DEFINIDA PELA AÇÃO:

$$G/H = \{a_1H, a_2H, \dots, a_mH\}$$

PARA CADA $g \in G$, A PERMUTAÇÃO σ_g PODE SER DEFINIDA POR

$$\sigma_g(i) = j \iff g a_i H = a_j H.$$

Ex: $G = D_8$, $H = \langle s \rangle$, ENUMERE AS CLASSES À ESQUERDA DISTINTAS $1H, rH, r^2H, r^3H$, COM OS NÚMEROS $1, 2, 3, 4$, RESPECTIV.

$s \cdot 1H = sH = 1H \rightarrow \sigma_s(1) = 1$

$s \cdot rH = srH = r^3H \rightarrow \sigma_s(2) = 4$

$s \cdot r^2H = sr^2H = r^2H \rightarrow \sigma_s(3) = 3$

$s \cdot r^3H = sr^3H = rH \rightarrow \sigma_s(4) = 2$

$\sigma_s = (2\ 4)$

Analogamente

$\sigma_r = (1\ 2\ 3\ 4)$

TEOREMA. SEJA G GRUPO, $H \leq G$; $A = \{aH : a \in G\}$

SUPONHA QUE G AGE EM A POR MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA SOBRE A.

SEJA π_H A REPRESENTAÇÃO POR PERMUTAÇÃO ASSOCIADA A ESSA AÇÃO:

ENTÃO: (1) G AGE TRANSITIVAMENTE SOBRE A.

(2) O ESTABILIZADOR EM G DO PONTO $1H \in A$ É O SUBGRUPO H.

(3) O KERNEL DA AÇÃO (i.e, O KERNEL DE π_H) É

$\bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$, e $\ker \pi_H$ É O MAIOR SUBGRUPO NORMAL DE G CONTIDO EM H.

DEM: (1) SEJAM aH, bH ELEMENTOS QUAISQUER DE A.

SEJA $g = ba^{-1}$. ENTÃO $g \cdot aH = (ba^{-1})aH = bH$

$\therefore$ DOIS ELEMENTOS QUAISQUER aH, bH EM A, PERTENCEM À MESMA ÓRBITA

TEOREMA. SEJA G GRUPO, $H \leq G$; $A = \{aH : a \in G\}$

SUPONHA QUE G AGE EM A POR MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA SOBRE A.

SEJA π_H A REPRESENTAÇÃO POR PERMUTAÇÕES ASSOCIADA A ESSA AÇÃO:

ENTÃO: (1) G AGE TRANSITIVAMENTE SOBRE A.

(2) O ESTABILIZADOR EM G DO PONTO $1H \in A$ É O SUBGRUPO H.

(3) O KERNEL DA AÇÃO (i.e., O KERNEL DE π_H) É

$\bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$, E $\ker \pi_H$ É O MAIOR SUBGRUPO NORMAL DE G CONTIDO EM H.

DEM. (2) POR DEF, O ESTABILIZADOR DE $1H$ É $\{g \in G \mid g \cdot 1H = 1H\} = H$.

(3) $\ker \pi_H = \{g \in G \mid gxH = xH, \forall x \in G\} =$

$= \{g \in G \mid (x^{-1}gx)H = H, \forall x \in G\} = \{g \in G \mid x^{-1}gx \in H, \forall x \in G\}$

$= \{g \in G \mid g \in xHx^{-1}, \forall x \in G\} = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}.$

$\ker \pi_H \trianglelefteq G$
$\ker \pi_H \leq H$.

SEJA $N \trianglelefteq G$, $N \subseteq H$. ENTÃO $N = xNx^{-1} \subseteq xHx^{-1}$, $\forall x \in G$.

DONDE $N \leq \bigcap_{x \in G} xHx^{-1} = \ker \pi_H$.

TEOREMA: SUPONHA QUE G AGE SOB UM CONJUNTO X:

(a) DIFERENTES ÓRBITAS DA AÇÃO SÃO DISJUNTAS E FORMAM UMA PARTIÇÃO DE X.

(b) PARA CADA $x \in X$, Stab_x É UM SUBGRUPO DE G. E
$\mathrm{Stab}_{gx} = g(\mathrm{Stab}_x)g^{-1}$, $\forall g \in G$.

(c) PARA CADA $x \in X$, EXISTE UMA BIJEÇÃO $\mathrm{Orb}_x \longrightarrow G/\mathrm{Stab}_x$ DEF. POR
$g \cdot x \longmapsto g\mathrm{Stab}_x$.
ALÉM DISSO, $|\mathrm{Orb}_x| = [G : \mathrm{Stab}_x]$

DEM: BASTA PROVAR (b):

$$
\begin{aligned}
h \in \mathrm{Stab}_{gx} &\iff h \cdot (gx) = gx \\
&\iff (hg) \cdot x = gx \\
&\iff g^{-1} \cdot ((hg) \cdot x) = x \\
&\iff (g^{-1}hg) \cdot x = x \\
&\iff g^{-1}hg \in \mathrm{Stab}_x \\
&\iff h \in g(\mathrm{Stab}_x)g^{-1}
\end{aligned}
$$

TEOREMA: SUPONHA QUE G AGE SOB UM CONJUNTO X:

(a) DIFERENTES ÓRBITAS DA AÇÃO SÃO DISJUNTAS E FORMAM UMA PARTIÇÃO DE X.

(b) PARA CADA $x \in X$, $Stab_x$ É UM SUBGRUPO DE G. E

$$Stab_{gx} = g\,Stab_x\,g^{-1}, \ \forall g \in G.$$

(c) PARA CADA $x \in X$, EXISTE UMA BIJEÇÃO $Orb_x \longrightarrow G/Stab_x$ DEF. POR $g \cdot x \longmapsto g\,Stab_x$

ALÉM DISSO, $|Orb_x| = [G : Stab_x]$

COROLÁRIO: SEJA G GRUPO FINITO AGINDO NUM CONJUNTO X:

a) O COMPRIMENTO DE TODA ÓRBITA DIVIDE A ORDEM DE G.

b) PONTOS NUMA ÓRBITA COMUM POSSUEM ESTABILIZADORES CONJUGADOS, EM PARTICULAR, O TAMANHO DO ESTABILIZADOR É O MESMO PARA TODOS OS PONTOS NUMA ÓRBITA.

DEM: (a) $|Orb_x| = [G : Stab_x] \longrightarrow \therefore |Orb_x| \mid |G|$.

(b) x, y ESTÃO NA MESMA ÓRBITA $\longrightarrow y = g \cdot x$. ENTÃO

$$Stab_y = Stab_{g \cdot x} = g\,Stab_x\,g^{-1}$$

$\square$

TEOREMA: SUPONHA QUE G AGE SOB UM CONJUNTO X:

(a) DIFERENTES ÓRBITAS DA AÇÃO SÃO DISJUNTAS E FORMAM UMA PARTIÇÃO DE X.

(b) PARA CADA $x \in X$, $Stab_x$ É UM SUBGRUPO DE G. E
$$Stab_{gx} = g(Stab_x)g^{-1}, \forall g \in G.$$

(c) PARA CADA $x \in X$, EXISTE UMA BIJEÇÃO $Orb_x \longrightarrow G/Stab_x$ DEF. POR $g \cdot x \longmapsto gStab_x$

ALÉM DISSO, $|Orb_x| = [G : Stab_x]$

COROLÁRIO: SEJA G GRUPO AGINDO NUM CONJUNTO FINITO X. SEJAM $x_1, x_2, \ldots, x_t$ REPRESENTANTES DAS DIFERENTES ÓRBITAS.

ENTÃO $$|X| = \sum_{i=1}^{t} |Orb_{x_i}| = \sum_{i=1}^{t} [G : Stab_{x_i}]$$

TEOREMA: SEJA G GRUPO FINITO AGINDO NUM CONJUNTO FINITO X COM r ÓRBITAS. ENTÃO $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}' |Fix_g(X)|$,

ONDE $Fix_g(X) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$, CONJUNTO DOS ELEMENTOS DE X FIXADOS POR g

DEM: CONTAREMOS $\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$ DE DUAS MANEIRAS:

- CONTANDO SOBRE OS g's PRIMEIRO, temos de somar os x's com $g \cdot x = x$.

$\therefore |\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}| = \sum_{g \in G}' |Fix_g(X)|$

- CONTANDO SOBRE OS x's E TEMOS DE ADICIONAR O NÚMERO DE g's com $g \cdot x = x$. i.e. com $g \in Stab_x$.

$|\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}| = \sum_{x \in X}' |Stab_x|$. Como $\frac{|G|}{|Stab_x|} = |Orb_x|$,

$\therefore \sum_{g \in G}' |Fix_g(X)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Orb_x|} \xrightarrow[\text{por } |G|]{\text{Dividindo}} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}' |Fix_g(X)| = \sum_{x \in X}' \frac{1}{|Orb_x|}$

TEOREMA: SEJA G GRUPO FINITO AGINDO NUM CONJUNTO FINITO X COM r ÓRBITAS. ENTÃO $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_g(X)|$,

ONDE $Fix_g(X) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$, CONJUNTO DOS ELEMENTOS DE X FIXADOS POR g

DEM: CONSIDEREMOS A CONTRIBUIÇÃO PARA O LADO DIREITO DE PONTOS DE UMA ÚNICA ÓRBITA. SE UMA ÓRBITA TEM n PONTOS, ENTÃO A SOMA SOB OS PONTOS NAQUELA ÓRBITA É UMA SOMA DE $\frac{1}{n}$ PARA n TERMOS, E AQUELA É IGUAL A 1. LOGO A PARTE DA SOMA SOB PONTOS EM UMA ÓRBITA É 1, ONDE A SOMA DO LADO DIREITO É IGUAL AO NÚMERO DE ÓRBITAS, QUE É IGUAL A r.

$\square$

$$\sum_{g \in G} |Fix_g(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Orb_x|} \xrightarrow[\text{por } |G|]{\text{Dividindo}} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_g(X)| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Orb_x|}$$

TEOREMA: (CONGRUÊNCIA DO PONTO FIXO), p PRIMO

SEJA G p-GRUPO FINITO AGINDO NUM CONJUNTO FINITO X

ENTÃO $|X| \equiv |\{\text{PONTOS FIXOS}\}| \mod p$.

DEM: SEJAM $x_1, x_2, \ldots, x_t$ REPRESENTANTES DAS DIFERENTES ÓRBITAS EM X

$\therefore \; |X| = \sum_{i=1}^{t} |Orb_{x_i}|$. COMO $|Orb_{x_i}| = [G : stab_{x_i}]$

E $|G|$ É POTÊNCIA DE p,

TEMOS QUE $|Orb_{x_i}| \equiv 0 \mod p$, EXCETO QUANDO $stab_{x_i} = G$, NESTE CASO

Orb_{x_i} TEM TAMANHO 1, I.E, x_i É PONTO FIXO.

REDUZINDO mod p, OS DOIS LADOS DA IGUALDADE, SEGUE A TESE.

<u>TEOREMA</u>: (CONGRUÊNCIA DO PONTO FIXO), p PRIMO

SEJA G p-GRUPO FINITO AGINDO NUM CONJUNTO FINITO X

ENTÃO $|X| \equiv |\{\text{pontos fixos}\}| \mod p$.

<u>TEOREMA</u>: SEJA G p-GRUPO FINITO NÃO TRIVIAL, p PRIMO.

ENTÃO p DIVIDE $|Z(G)|$. EM PARTICULAR, G POSSUI CENTRO NÃO TRIVIAL.

DEM: obs. $a \in Z(G) \iff a = gag^{-1}, \forall g \in G$. ($\therefore$ a É FIXADO POR TODAS AS CONJUGAÇÕES)

IDÉIA: CONSIDERE A AÇÃO DE G SOBRE SI MESMO ($X = G$) POR CONJUGAÇÃO.

E CONTAR OS PONTOS FIXOS.

COMO G É p-GRUPO, $X = G$, PELA CONGRUÊNCIA DO PONTO FIXO,

$|G| \equiv |Z(G)| \mod p$

$|G|$ É POTÊNCIA DE p

$\rightarrow p \mid |Z(G)|$

COMO $|Z(G)| \geq 1$ (pois $e \in Z(G)$) $\Rightarrow$

$\rightarrow |Z(G)| \geq p$, EM PARTICULAR,

$Z(G) \neq \{e\}$.