Introdução a Teoria dos Grupos – MAT 113 – Pós Mat – UFABC- QS2020.2

TEOREMA FUNDAMENTAL DOS GRUPOS ABELIANOS FINITAMENTE GERADOS:

SEJA G GRUPO ABELIANO F. G.

(i) EXISTE UM ÚNICO INTEIRO NÃO NEGATIVO s TAL QUE O ~~NÚMERO~~ O NÚMERO DE SOMANDO CÍCLICOS INFINITOS EM QUALQUER DECOMPOSIÇÃO DE G COMO UMA SOMA DIRETA DE GRUPOS CÍCLICOS É EXATAMENTE s.

(ii) OU G É ABELIANO LIVRE OU EXISTE UMA LISTA ÚNICA DE INTEIROS POSITIVOS (NÃO NECESSARIAMENTE DISTINTOS) $m_1, m_2, \dots, m_t$ TAIS QUE $m_1 > 1$, $m_1 | m_2 | \dots | m_t$ E

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_t} \oplus F, \quad F \cong \mathbb{Z}^s = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{s}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DOS GRUPOS ABELIANOS FINITAMENTE GERADOS:

SEJA G GRUPO ABELIANO F. G.

(iii) OU G É ABELIANO LIVRE OU EXISTE UMA LISTA DE INTEIROS POSITIVOS $p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, \dots, p_k^{s_k}$ A QUAL É ÚNICA, A MENOS DE ORDEM DOS SEUS MEMBROS, TAL QUE $p_1, \dots, p_k$ SÃO PRIMOS (NÃO NECESSARIAMENTE DISTINTOS), $s_1, s_2, \dots, s_k$ SÃO INTEIROS POSITIVOS (NÃO NECESSARIAMENTE DISTINTOS) E

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{s_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} \oplus F, \quad F \cong \mathbb{Z}^s = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{s}$$

DEF: SEJA G GRUPO ABELIANO F.G. COM

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_t} \oplus F,$$ F abeliano livre

E $m_1 | m_2 | \cdots | m_t$. OS INTEIROS $m_1, m_2, \ldots, m_t$ SÃO OS FATORES INVARIANTES DE G. COM

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{s_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} \oplus F,$$ F ABELIANO LIVRE

CADA p_i É PRIMO, CADA s_i É INTEIRO POSITIVO, ENTÃO AS POTÊNCIAS DOS PRIMOS $p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, \ldots, p_k^{s_k}$ SÃO OS DIVISORES ELEMENTARES DE G.

OBS: SE $F \cong \mathbb{Z}^s$,

$s \to$ O NÚMERO DE BETTI DE G
ou
POSTO LIVRE DE G.

easy office

DETERMINE TODOS OS GRUPOS ABELIANOS (A MENOS DE ISOMORFISMO) DE ORDEM 720:

- ENCONTRE A FATORAÇÃO DE 720: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

PARA O FATOR 2^4: OBTEMOS OS SEGUINTE GRUPOS NÃO ISOMORFOS:

$\mathbb{Z}_{16}$; $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$; $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ E $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$

PARA O FATOR 3^2:

$\mathbb{Z}_9$; $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$

PARA O FATOR 5:

$\mathbb{Z}_5$

OBTEMOS 10 POSSIVEIS GRUPOS DE ORDEM 720:

$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$

LEMA: SEJAM $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, p_i: PRIMOS DISTINTOS, $\alpha_i \in \mathbb{N}$

ENTÃO: $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_t^{\alpha_t}}$

COMO OBTER OS m_i'S NO TEOREMA DOS $p_i^{s_i}$'S NO TEOREMA:

EXEMPLO: CONSIDERE $G = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{54}$.

ENTÃO PELO LEMA, $G \cong \mathbb{Z}_5 \oplus (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5) \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9) \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{27})$

LOGO OS DIVISORES ELEMENTARES DE G SÃO:

$2, 2^2, 3, 3^2, 3^3, 5, 5, 5^2$ O QUAL ARRANJAMOS COMO:

$2^0, 3, 5 \longrightarrow m_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$

$2, 3^2, 5 \longrightarrow m_2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

$2^2, 3^3, 5^2 \longrightarrow m_3 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 2700$

MULTIPLICANDO AS LINHAS, OBTEMOS

LOGO OS FATORES INVARIANTES SÃO 15, 90 E 2700

$\therefore G \cong \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{90} \oplus \mathbb{Z}_{2700}$