Introdução a Teoria dos Grupos – MAT 113 – Pós Mat – UFABC- QS2020.2

DEF Um grupo G é dito ser **SOLÚVEL** se existir uma sequência de subgrupos $H_0=\{e\}, H_1, \ldots, H_s=G$, de G, tais que $H_i \triangleleft H_{i+1}$, cada quociente $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ é abeliano

$$\{e\}=H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_s=G, \quad \frac{H_{i+1}}{H_i} \text{ abeliano.}$$

(1) $N \triangleleft G$. Se N é solúvel e $\frac{G}{N}$ solúvel então G é solúvel.

N solúvel $\longrightarrow$ existe uma cadeia de subgrupos

$$\{e\}=N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \cdots \triangleleft N_n=N \quad \frac{N_{i+1}}{N_i} \text{ ABELIANO}$$

$\bar{G}=\frac{G}{N}$ solúvel $\longrightarrow \{\bar{e}\}=\bar{G}_0 \triangleleft \bar{G}_1 \triangleleft \cdots \triangleleft \bar{G}_m=\bar{G}$, $\quad \frac{\bar{G}_{i+1}}{\bar{G}_i}$ ABELIANO

- PELO TEOR. DE CORRESPONDÊNCIA, EXISTEM SUBGRUPOS G_i DE G TAIS QUE $N \subseteq G_i$, $\frac{G_i}{N} = \overline{G_i}$ E $G_i \triangleleft G_{i+1}$.

PELO T. DO ISOMORFISMO, $\frac{\overline{G_{i+1}}}{\overline{G_i}} \cong \frac{\frac{G_{i+1}}{N}}{\frac{G_i}{N}} \cong \frac{G_{i+1}}{G_i}$ ABELIANO.

$\therefore \{e\} = N_0 \triangleleft \cdots \triangleleft N_n = N = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_m = G \longrightarrow G$ É SOLÚVEL.

---

(1) $N \triangleleft G$. SE N É SOLÚVEL E $\frac{G}{N}$ SOLÚVEL ENTÃO G É SOLÚVEL.

N SOLÚVEL $\longrightarrow$ EXISTE UMA CADEIA DE SUBGRUPOS

$\{e\} = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \cdots \triangleleft N_n = N$ $\quad \frac{N_{i+1}}{N_i}$ ABELIANO

$\overline{G} = \frac{G}{N}$ SOLÚVEL $\longrightarrow \{\bar{e}\} = \overline{G_0} \triangleleft \overline{G_1} \triangleleft \cdots \triangleleft \overline{G_m} = \overline{G}$, $\quad \frac{\overline{G_{i+1}}}{\overline{G_i}}$ ABELIANO

DEF: SEJA G GRUPO, DEFINA A SEGUINTE SEQÜÊNCIA DE SUBGRUPOS, INDUTIVAMENTE:

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(1)} = [G, G] = G'; \quad G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}], \ \forall i \geq 1.$$

$\hookrightarrow$ SÉRIE DERIVADA DE G. $\quad \cdots \leq G^{(2)} \leq G^{(1)} \leq G^{(0)}$

(i) $\underline{G^{(i)} \trianglelefteq G, \forall i}$ $\qquad g^x = xgx^{-1}$

$\underline{i=1}$, SEJA $ghg^{-1}h^{-1}$ GERADOR DE G', $x \in G$.

$\therefore xghg^{-1}h^{-1}x^{-1} = xgx^{-1}xhx^{-1}xg^{-1}x^{-1}xh^{-1}x^{-1} = g^x h^x (g^{-1})^x (h^{-1})^x \in G'$.

x normaliza um gerador de $G' \rightarrow x$ normaliza um elemento arbitrário de G' $\therefore G' \trianglelefteq G$.

Suponha $G^{(i-1)} \trianglelefteq G$, $\quad ghg^{-1}h^{-1}$ gerador ARBITRÁRIO DE $G^{(i)}$, $x \in G$.

$\therefore xghg^{-1}h^{-1}x^{-1} = g^x h^x (g^{-1})^x (h^{-1})^x$. COMO $g \in G^{(i-1)}$, $h \in G^{(i-1)}$, $G^{(i-1)} \trianglelefteq G$

$\longrightarrow g^x h^x (g^{-1})^x (h^{-1})^x \in G^{(i)}$ e $G^{(i)} \trianglelefteq G$.

TEOREMA: G GRUPO SOLÚVEL $\Longleftrightarrow$ $G^{(n)} = \{e\}$, PARA ALGUM $n \geq 0$.

$(\Longrightarrow)$ G SOLÚVEL $\rightarrow$ G POSSUI CADEIA DE SUBGRUPOS

$$H_0 = \{e\} \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_s = G \, , \quad \frac{H_{i+1}}{H_i} \text{ ABELIANOS}$$

AF: $G^{(i)} \leq H_{s-i}$.

$i = 0$, A AFIRMAÇÃO É VERDADEIRA.

SUPONHA $G^{(i)} \leq H_{s-i}$.

$$\therefore \; G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \subseteq [H_{s-i}, H_{s-i}] \subseteq H_{s-i-1}$$

COMO $\dfrac{H_{s-i}}{H_{s-i-1}}$ É ABELIANO $\longrightarrow$ $H'_{s-i} = [H_{s-i}, H_{s-i}] \subseteq H_{s-i-1}$

COMO $H_0 = \{e\} \rightarrow G^{(s)} = \{e\}$

TEOREMA: G GRUPO SOLÚVEL $\Leftrightarrow$ $G^{(n)} = \{e\}$, PARA ALGUM $n \geq 0$.

($\Leftarrow$) SUPONHA $G^{(n)} = \{e\}$, PARA ALGUM n.

TOME $H_i = G^{(n-i)}$ ENTÃO $H_i \lhd H_{i+1}$ E $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ ABELIANOS.

E A SÉRIE DERIVADA SATISFAZ AS CONDIÇÕES DE SOLUBILIDADE.

easy office

PROP: SEJAM G, K GRUPOS, $\varphi: G \longrightarrow K$ HOMOMORFISMO SOBREJETOR.

VALEM: (i) $H^{(i)} \leq G^{(i)}$, $\forall i \geq 0$ (EM PARTICULAR, TODO SUBGRUPO DE UM GRUPO SOLÚVEL É SOLÚVEL)

(ii) $\varphi(G^{(i)}) = K^{(i)}$, $\forall i \geq 0$ (EM PARTICULAR, IMAGEM HOMOMÓRFICA E GRUPO QUOCIENTE DE GRUPOS SOLÚVEIS SÃO SOLÚVEIS)

DEM: (i) COMO $H \leq G$, PELA DEF. DE GRUPO COMUTADOR:

$[H, H] \leq [G, G]$, I.E $H^{(1)} \leq G^{(1)}$.

POR INDUÇÃO, $H^{(i)} \leq G^{(i)}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. EM PARTICULAR, SE $G^{(n)} = \{e\}$ PARA ALGUM n, ENTÃO $H^{(n)} = \{e\}$.

PROP: SEJAM G, K GRUPOS, $\varphi: G \to K$ HOMOMORFISMO SOBREJETOR.

VALEM: (i) $H^{(i)} \leq G^{(i)}$, $\forall i \geq 0$ (EM PARTICULAR, TODO SUBGRUPO DE UM GRUPO SOLÚVEL É SOLÚVEL)

(ii) $\varphi(G^{(i)}) = K^{(i)}$, $\forall i \geq 0$ (EM PARTICULAR, IMAGEM HOMOMÓRFICA E GRUPO QUOCIENTE DE GRUPOS SOLÚVEIS SÃO SOLÚVEIS)

DEM: (ii) PELA DE COMUTADOR

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$ POR INDUÇÃO, $\varphi(G^{(i)}) \leq K^{(i)}$.

COMO φ É SOBREJETORA, TODO COMUTADOR EM K É IMAGEM DE UM COMUTADOR EM G. NOVAMENTE POR INDUÇÃO, OBTEMOS IGUALDADE PARA TODO i.

DE NOVO, SE $G^{(n)} = \{e\}$, PARA ALGUM n, ENTÃO $K^{(n)} = \{e\}$.

DEF: UM GRUPO G É <u>NILPOTENTE</u> SE ELE CONTÉM UMA SÉRIE DE SUBGRUPOS:

$$\{e\} = G_0 < G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G.$$

TAL QUE $G_i \triangleleft G$, $i = 0, \dots, n$, E CADA QUOCIENTE $\frac{G_i}{G_{i-1}} \subset Z\left(\frac{G}{G_{i-1}}\right)$, $1 \leq i \leq n$.

UMA TAL SÉRIE DE GRUPOS, DÁ-SE UMA <u>SÉRIE CENTRAL DE</u> G.

G GRUPO, DEFINIMOS INDUTIVAMENTE:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_2(G) = G', \quad \text{E} \quad \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G].$$

G GRUPO, DEFINIMOS INDUTIVAMENTE

$$Z_0(G) = \{e\}, \quad Z_1(G) = Z(G); \qquad \frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_{i-1}(G)}\right)$$

$Z_i(G) \rightarrow$ <u>i-ÉSIMO CENTRO DE G</u>

easy office

DEF: $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots \longrightarrow$ SÉRIE CENTRAL SUPERIOR DE G

$G = \gamma_1(G) \supset \gamma_2(G) \supset \gamma_3(G) \supset \ldots \longrightarrow$ SÉRIE CENTRAL INFERIOR DE G.

LEMA: SEJA $\{e\} = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ UMA SÉRIE CENTRAL DE G (i.e UMA CADEIA DE SUBGRUPOS NORMAIS T.Q. $\frac{A_i}{A_{i-1}} \subseteq Z\left(\frac{G}{A_{i-1}}\right)$, PARA TODO i). ENTÃO $A_i \subset Z_i(G)$, $\forall i$

DEM: $i=1$, O RESULTADO É VERDADEIRO.

SUP. $A_i \subseteq Z_i(G)$. DADOS $x \in A_{i+1}$, $g \in G$.

COMO $\frac{A_{i+1}}{A_i} \subset Z\left(\frac{G}{A_i}\right) \rightarrow x g x^{-1} g^{-1} \in A_i \subset Z_i(G)$. DA DEF. DE $Z_{i+1}(G)$

TEMOS $A_{i+1} \subset Z_{i+1}(G)$.

DEF: $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots \longrightarrow$ SÉRIE CENTRAL SUPERIOR DE G

$G = \gamma_1(G) \supset \gamma_2(G) \supset \gamma_3(G) \supset \ldots \longrightarrow$ SÉRIE CENTRAL INFERIOR DE G.

LEMA: SEJA $\{e\} = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n = G$.

UMA SÉRIE CENTRAL DE G (i.e UMA CADEIA DE SUBGRUPOS NORMAIS T.Q. $\frac{A_i}{A_{i-1}} \subseteq Z\left(\frac{G}{A_{i-1}}\right)$, PARA TODO i). ENTÃO $\gamma_i(G) \subseteq A_{n-i+1}$, $\forall i$.

DEM: SE $i=1$, O RESULTADO É VERDADEIRO.

SUPONHA QUE $\gamma_i(G) \subset A_{n-i+1}$ (POR INDUÇÃO)

COMO $\frac{A_{n-i+1}}{A_{n-i}} \subset Z\left(\frac{G}{A_{n-i}}\right) \longrightarrow [A_{n-i+1}, G] \subseteq A_{n-i}$.

TEOREMA: SEJA G GRUPO. SÃO EQUIVALENTES:

(i) G É NILPOTENTE.

(ii) EXISTE UM INTEIRO POSITIVO m TAL QUE $Z_m(G) = G$.

(iii) EXISTE UM INTEIRO POSITIVO n TAL QUE $\gamma_n(G) = \{e\}$.

PROP. TODO p-GRUPO FINITO É NILPOTENTE

DEM: G p-GRUPO FINITO $\longrightarrow Z(G) \neq \{e\}$.

COMO TODOS OS QUOCIENTES DE G SÃO TAMBÉM p-GRUPOS, SEGUE QUE $Z_{i-1}(G) \subsetneq Z_i(G)$, PARA TODO INTEIRO POSITIVO i.

COMO G É FINITO, EXISTE n TAL QUE $G = Z_n(G)$. $\therefore G$ É NILPOTENTE.

PROP: PRODUTO DIRETOS FINITOS DE GRUPOS NILPOTENTES É NILPOTENTE.

SUG: NOTE QUE SE $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ ENTÃO $\gamma_i(G) = \gamma_i(G_1) \times \cdots \times \gamma_i(G_n)$

PROP: SEJA $H \neq \{e\}$, H SUBGRUPO NORMAL DE UM GRUPO NILPOTENTE G. ENTÃO $H \cap Z(G) \neq \{e\}$

DEM: COMO $G = Z_n(G)$ PARA ALGUM n.

EXISTE UM ÍNDICE i TAL QUE $H \cap Z_i(G) \neq \{e\}$.

ENTÃO $[H \cap Z_i(G), G] \subseteq H \cap Z_{i-1}(G) = \{e\}$.

LOGO $H \cap Z_i(G) \subseteq H \cap Z(G)$.

- Observações:
- No slide 7, H é um subgrupo arbitrário de G.