INTRODUÇÃO A PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA – UFABC - QS 2021.1

Informações rápidas

- Página da disciplina: hostel.ufabc.edu.br/~edson.iwaki ➔procure o link da sua turma.
- Email: edson.iwaki@ufabc.edu.br
- Além de todas as informações gerais do curso, os slides das aulas serão disponibilizados na página da disciplina.
- Recorde: o site do moodle: moodle.ufabc.edu.br

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

SEJAM $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $\#A = m$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ $\#B = n$.

Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) onde $a_i \in A$, $b_j \in B$.

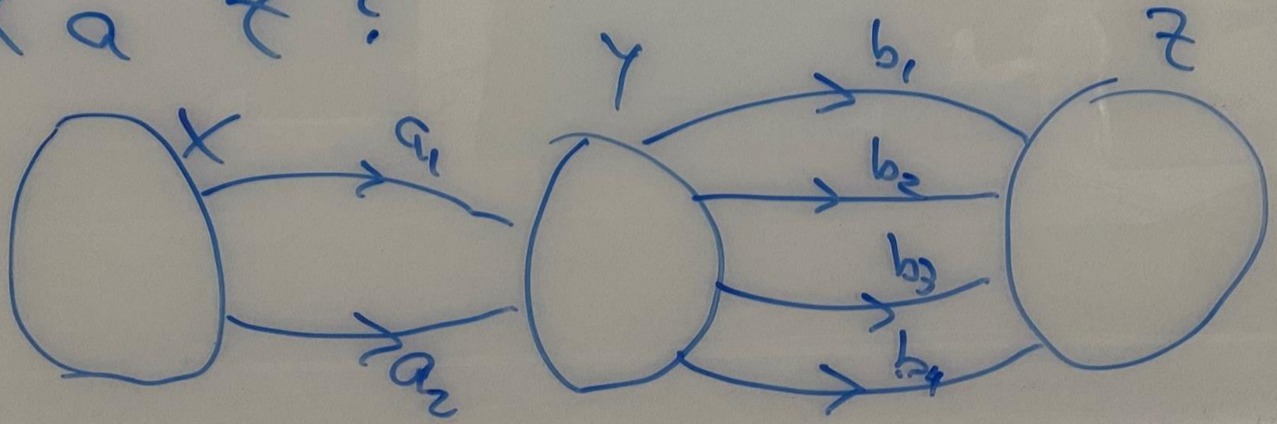
Dem:

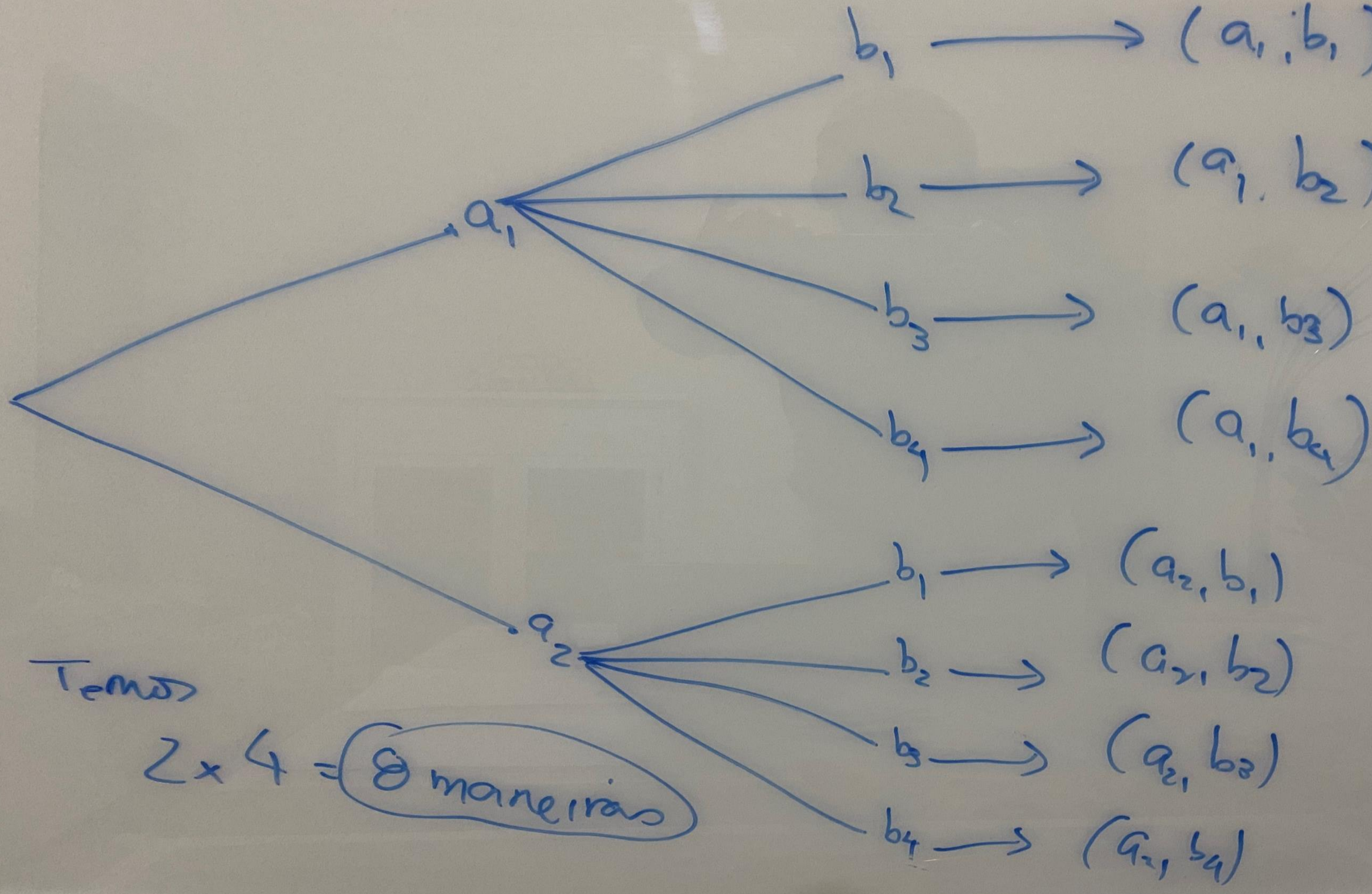
$$\begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n) \to n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n) \to n \text{ pares} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n) \to n \text{ pares} \end{cases}$$

Exemplos:

TEMOS TRÊS CIDADES X, Y, Z.
DUAS RODOVIAS LIGAM X a Y e
QUATRO RODOVIAS LIGAM Y a Z.
DE QUANTAS FORMAS PODEMOS CHEGAR
de X a Z?

Sol:





Temos

$2 \times 4 =$ 8 maneiras

2) QUANTOS NÚMEROS DE DOIS ALGARISMOS PODEM SER FORMADOS USANDO OS DÍGITOS 1, 2, 3, 4 ?

R. $4 \times 4 = 16$.

3) QUANTOS NÚMEROS COM DOIS ALGARISMOS DISTINTOS PODEMOS FORMAR COM OS DÍGITOS 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?

R. CADA NÚMERO PODE SER CONSIDERADO COMO UM PAR (a, b), COM $a \neq b$, $a \in \{1, 2, \dots, 7\}$ e $b \in \{1, 2, \dots, 7\}$

LOGO TEMOS $7 \times 6 = 42$

· SEJA A CONJUNTO COM m ELEMENTOS $(m \geq 2)$

O NÚMERO DE r-uplas (OU SEQUÊNCIA DE r ELEMENTOS FORMADAS COM ELEMENTOS DISTINTOS DE A é:

$$A_{m,r} = \underline{m} \cdot \underline{(m-1)} \cdot \underline{(m-2)} \cdots (m-(r-1))$$

<u>OBS:</u> $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-(r-1)) \times \dfrac{(m-r)(m-r-1) \cdots \cdot 2 \cdot 1}{(m-r)(m-r-1) \cdots 2 \cdot 1} =$

$$= \boxed{\frac{m!}{(m-r)!} = A_{m,r}}$$

SEJA $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$; $\#A = m$.

Def

Um ARRANJO DOS m-elementos TOMADOS r a r É QUALQUER SEQÜÊNCIA DE r ELEMENTOS FORMADA COM ELEMENTOS DE A, TODOS DISTINTOS.

- UMA PERMUTAÇÃO DOS m ELEMENTOS É QUALQUER ARRANJO COM $r = m$.

EXEMPLO:

$A = \{a, b, c\}$ $\#A = 3$.

AS PERMUTAÇÕES DOS ELEMENTOS DE A SÃO TODOS OS ARRANJOS COM 3 ELEMENTOS, i.e,

(a,b,c); (a,c,b); (b,a,c); (b,c,a); (c,a,b); (c,b,a).

Se A possui m ELEMENTOS, O NÚMERO DE PERMUTAÇÕES DE A é IGUAL À:

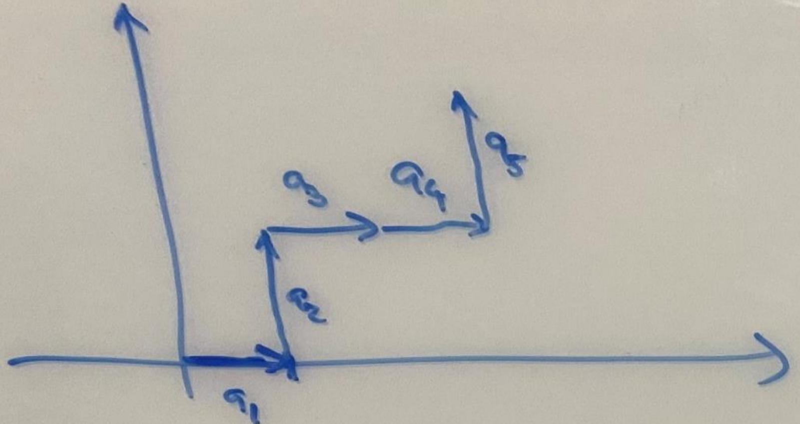
$$P_m = m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1 = m!$$

Ex: DE QUANTAS FORMAS 6 PESSOAS PODEM FICAR EM FILA INDIANA?

$P_6 = 6!$

Ex: UM HOMEM ENCONTRA-SE NA ORIGEM DE UM SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL DE EIXOS Ox, Oy. ELE PODE-SE DAR UM PASSO DE CADA VEZ, PARA O NORTE, OU PARA O LESTE. QUANTAS TRAJETÓRIAS ELE PODE PERCORRER SE DER EXATAMENTE CINCO PASSOS?

easy office



O NÚMERO DE TRAJETÓRIAS É DADO POR: 2^5.

$a_1 \in \{N, L\}$, $a_2 \in \{N, L\}$, $a_3 \in \{N, L\}$,
$a_4 \in \{N, L\}$, $a_5 \in \{N, L\}$,

$N \to$ NORTE, $L \to$ LESTE

__Ex:__ UM HOMEM ENCONTRA-SE NA ORIGEM DE UM SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL DE EIXOS Ox, Oy. ELE PODE-SE DAR UM PASSO DE CADA VEZ, PARA O NORTE, OU PARA O LESTE. QUANTAS TRAJETÓRIAS ELE PODE PERCORRER SE DER EXATAMENTE CINCO PASSOS?

Ex: Seja A, B CONJUNTOS, $\#A = n$ ELEMENTOS.

$\#B = r$ ELEMENTOS.

QUANTAS FUNÇÕES $f : A \longrightarrow B$ INJETORA EXISTEM?

$1 \leq n \leq r$.

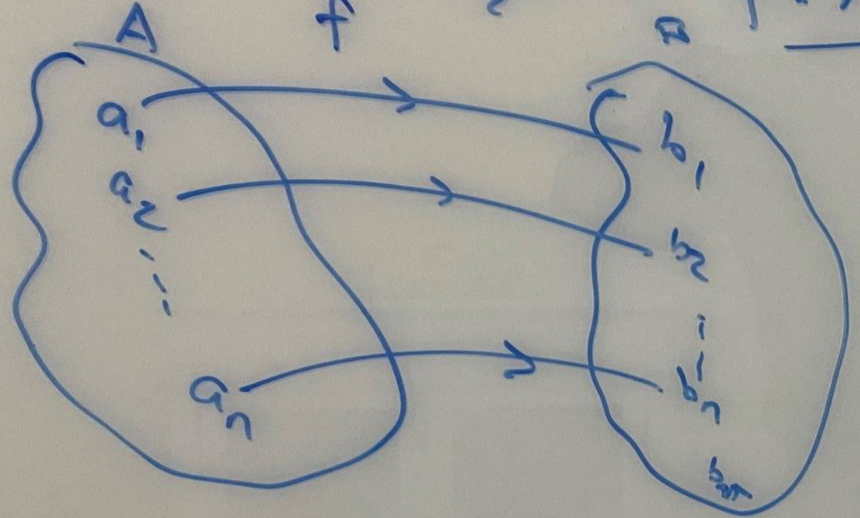
Ex: Seja A, B CONJUNTOS, $\#A = n$ ELEMENTOS.

$\#B = r$ ELEMENTOS.

QUANTAS FUNÇÕES $f: A \longrightarrow B$ INJETORA EXISTEM?

$1 \leq n \leq r$.

R:



f injetora $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(a_i) \neq f(a_j)$ $\forall i \neq j$

CADA FUNÇÃO f É DEFINIDA POR UMA n-upla da imagem, ONDE A n-upla É DISTINTA, pois f É INJETORA.

exemplos:

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_k) & f(a_{k+1}) & & f(a_n) \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{cccccccc} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_{k+1} & b_k & \cdots & b_2 & b_1 \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_{n-k}) & f(a_{n-k+1}) & & f(a_{n-1}) & f(a_n) \end{array}$$

$\therefore$ R: $\boxed{A_{r,n}}$

COMBINAÇÕES:

SEJA $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $\#A = m$.

CHAMAMOS DE COMBINAÇÕES DE m ELEMENTOS TOMADOS r A r, AOS SUBCONJUNTOS DE A FORMADOS POR r ELEMENTOS. O SEU NÚMERO É: $C_{m,r} = \binom{m}{r}$.

Ex: $A = \{a, b, c, d\}$.

AS COMBINAÇÕES DOS 4 ELEMENTOS, TOMADOS DOIS A DOIS, SÃO OS CONJUNTOS:

$\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{c,d\}$

$\{a,c\}$, $\{b,d\}$,

$\{a,d\}$

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Ex: QUAL O NÚMERO DE PERMUTAÇÕES DA PALAVRA ANA?

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Ex: QUAL O NÚMERO DE PERMUTAÇÕES DA PALAVRA ANA?

DENOTE A^* O SEGUNDO 'A' em ANA.

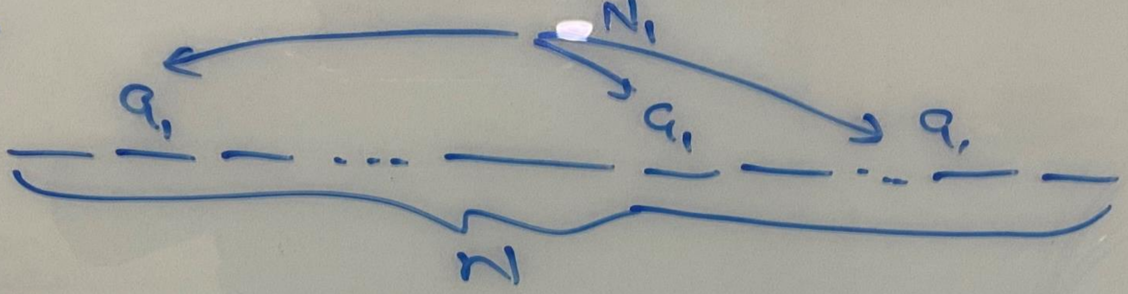
TEMOS: $\underbrace{ANA^*}_{1}$, $\underbrace{AA^*N}_{2}$, $\underbrace{NAA^*}_{3}$, $\underbrace{NA^*A}_{4}$, $\underbrace{A^*NA}_{5}$, $\underbrace{A^*AN}_{6}$

(1) e (5) SÃO IGUAIS.
(2) e (6) SÃO IGUAIS
(3) e (4) SÃO IGUAIS

EM REALIDADE, NÃO TEMOS $3! = 6$ PERMUTAÇÕES MAS APENAS 3 → (ANA; AAN; NAA)

ISSO OCORRE PORQUE TEMOS LETRAS REPETIDAS.

CASO 1: N ELEMENTOS DOS QUAIS N_1 SÃO IGUAIS A a_1 E OS RESTANTES SÃO TODOS DISTINTOS ENTRE SI E DISTINTOS DE a_1.

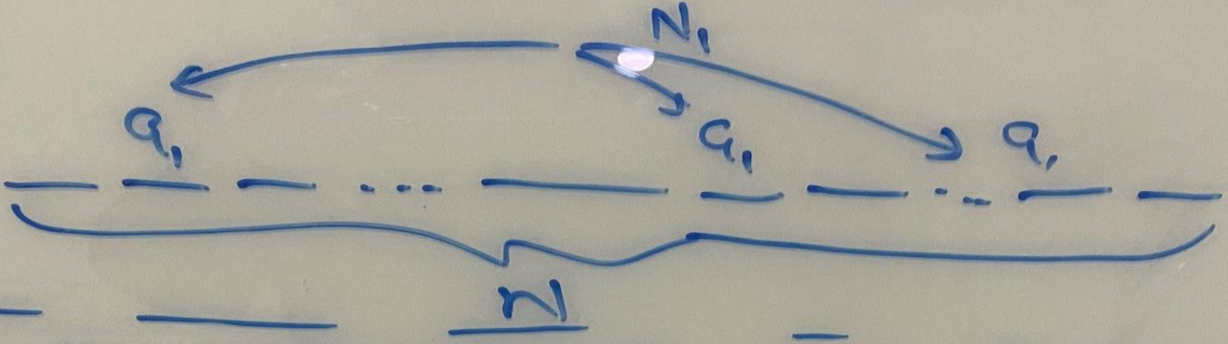


SEJA $P_N^{N_1}$ O NÚMERO DE PERMUTAÇÕES NAS CONDIÇÕES E CALCULEMOS O SEU VALOR.

- CADA PERMUTAÇÃO DE N ELEMENTOS É UMA N-UPLA ORDENADA DE N ELEMENTOS, ONDE DEVEM FIGURA N_1 ELEMENTOS a_1 E $N-N_1$ ELEMENTOS DISTINTOS

ASO 1: N ELEMENTOS DOS QUAIS N_1 SÃO IGUAIS A (

E OS RESTANTES SÃO TODOS DISTINTOS ENTRE SI E DISTINTOS DE a_1.



DAS N POSIÇÕES DA PERMUTAÇÃO, ESCOLHEMOS $N-N_1$ POSIÇÕES PARA COLOCAR TODOS OS ELEMENTOS DISTINTOS DE a_1. TEMOS $\binom{N}{N-N_1}$ MODOS DE ESCOLHER ESTAS POSIÇÕES.

∴ PARA CADA ESCOLHA DE $N-N_1$ POSIÇÕES, EXISTEM $(N-N_1)!$ MANEIRAS EM QUE OS $N-N_1$ ELEMENTOS PODEM SER PERMUTADOS. LOGO TEMOS: $\binom{N}{N-N_1}\cdot(N-N_1)! = \frac{N!}{N_1!}$ FORMAS DE DISPOR OS ELEMENTOS DISTINTOS DE a_1 NA PERMUTAÇÃO

UMA VEZ COLOCADOS ESTES ELEMENTOS DISTINTOS, A POSIÇÃO DOS ELEMENTOS REPETIDOS a_1 FICA DETERMINADA

DE MODO ÚNICO. PELOS LUGARES RESTANTES.

LOGO, EXISTE $\dfrac{N!}{N_1!}$ PERMUTAÇÕES COM N_1 ELEMENTOS IGUAIS A a_1.

$$\therefore P_N^{N_1} = \frac{N!}{N_1!}$$

Ex: QUANTOS ANAGRAMAS DA PALAVRA PARAGUAI EXISTEM?

Sol.: A A A → REPETIDAS

P
R
G
U
I

$N = 8$, $N_1 = 3$, $a_1 = A$

$$P_N^{N_1} = P_8^3 = \frac{8!}{3!} = 6720$$

CASO GERAL:

PERMUTAÇÃO COM N ELEMENTOS,

COM N_1 ELEMENTOS IGUAIS A a_1;

COM N_2 ELEMENTOS IGUAIS A a_2;

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

COM N_k ELEMENTOS IGUAIS A a_k;

O NÚMERO DE PERMUTAÇÕES DE UMA PALAVRA COM N ELEMENTOS SATISFAZENDO AS CONDIÇÕES ACIMA É DADO POR:

$$P_N^{N_1, N_2, \ldots, N_k} = \frac{N!}{N_1!\, N_2! \cdots N_k!}$$

DETERMINE O NÚMERO DE SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS DA EQUAÇÃO $X+Y+Z=7$.

DEM: IDÉIA → DIVIDIR 7 EM TRÊS PARTES ORDENADAS DE MODO QUE CADA PARTE FIQUE COM UM NÚMERO MAIOR OU IGUAL A ZERO

INDICAMOS UMA UNIDADE POR • E CADA BARRA | CORRESPONDE A CADA SINAL '+'.

VEJAMOS ALGUMAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO:

$$\| \underbrace{\bullet\bullet}_{2} \mid \underbrace{\bullet\bullet\bullet}_{3} \mid \underbrace{\bullet\bullet}_{2} \|$$

$$\| \underbrace{\bullet}_{1} \mid \underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet}_{4} \mid \underbrace{\bullet\bullet}_{2} \|$$

$$\| \underbrace{\bullet\bullet}_{2} \mid \underbrace{}_{0} \mid \underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{5} \|$$

$$\| \underbrace{\bullet\bullet\bullet}_{3} \mid \underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet}_{4} \mid \underbrace{}_{0} \|$$

TEMOS 9 SÍMBOLOS $\begin{cases} 7 \ \bullet \\ 2 \ \mid \end{cases}$

O NÚMERO DE PERMUTAÇÕES DESSES SÍMBOLOS É $P_9^{7,2} = \frac{9!}{2!\,7!} = 36$

CASO GERAL:

DETERMINE O NÚMERO DE SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS DA EQUAÇÃO $X_1 + X_2 + \ldots + X_N = R$ (R≥

DEM: CADA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO É UMA PERMUTAÇÃO DE R SÍMBOLOS e (N−1) SÍMBOLOS | (A EQUAÇÃO POSSUI N−1 SÍMBOLOS '+').

LOGO O NÚMERO DE SOLUÇÕES É:

$$P_{N+R-1}^{N-1,R} = \frac{(N+R-1)!}{(N-1)!\,R!}$$