Introdução a Teoria dos Grupos – MAT 113 – Pós Mat – UFABC-QS2020.2

SUBGRUPO GERADO POR UM CONJUNTO:

NOT: H, K SUBGRUPOS DO GRUPO G.

$HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ SUBCONJUNTO DE G.

$H^{-1} = \{h^{-1} \mid h \in H\} \subset G$.

EM GERAL, HK NÃO É SUBGRUPO DE G.

S SUBCONJUNTO, $S \subset G$.

$\langle S \rangle := \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in S \text{ ou } a_i \in S^{-1}\}$

QUANDO S É FINITO $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ USAREMOS A NOTAÇÃO, $\langle S \rangle = \langle \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \rangle$.

. $\langle S \rangle$ É GRUPO.

<u>De FATO:</u> SEJAM $x = a_1 a_2 \cdots a_n$, $a_i \in S$ ou $a_i \in S^{-1}$. $i = 1, \ldots, n$

$y = b_1 b_2 \cdots b_m$, $b_j \in S$ ou $b_j \in S^{-1}$ $j = 1, \ldots, m$.

$\therefore xy = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m \in \langle S \rangle$.

$x^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_2^{-1} a_1^{-1} \in \langle S \rangle$ $\square$.

$\langle S \rangle \longrightarrow$ SUBGRUPO <u>GERADO</u> POR S; OS ELEMENTOS DE S SÃO OS <u>GERADORES</u> DE $\langle S \rangle$.

<u>Ex:</u> (1) $g \in G$, $\langle g \rangle = \{ \ldots, g^{-2}, g^{-1}, e, g, g^2, g^3, \ldots \rangle$ GRUPO CÍCLICO GERADO POR g.

(2) $D_n = \langle r, s \mid r^n = 1,\ s^2 = 1,\ srs^{-1} = r^{-1} \rangle$.

GRUPO DIEDRAL DE ORDEM <u>$2n$</u>

<u>Ex:</u> MOSTRE QUE $\langle S \rangle$ É O MENOR SUBGRUPO DE G CONTENDO S e $\langle S \rangle$ É A INTERSECÇÃO DE TODOS OS SUBGRUPOS DE G CONTENDO S.

SEJA G GRUPO, $H, K \leq G$.

DEF: O PRODUTO DIRETO DE H E K POR

$$H \times K = \{(h, k) \mid h \in H, k \in K\}$$

COM OPERAÇÃO DEF:

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) \doteq (h_1 h_2, k_1 k_2).$$

SUPONHA $|G| = 4$. · SE G possui elemento x de ordem 4 ENTÃO $G = \langle x \rangle$

$$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

·· SE G NÃO POSSUI ELEMENTO DE ORDEM 4. POR LAGRANGE,

$o(x) = 2$ ie $x^2 = e$, $\forall x \in G$, $x \neq e$.

$\therefore (xy)^{-1} = xy \Rightarrow y^{-1}x^{-1} = xy \Rightarrow yx = xy \quad \forall x, y \in G$.

G É ABELIANO.

Ex: MOSTRE $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +\right)$ É UM GRUPO ABELIANO DE ORDEM 4, NÃO CÍCLICO.

O GRUPO $G \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +\right)$ É DENOMINADO <u>GRUPO DE KLEIN</u>

SEJA G GRUPO, $Sym(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ função byetora}\}$

. DEF: $T_a : G \longrightarrow G$ por $T_a(x) = ax$, $\forall x \in G$.

· O QUE É O PRODUTO $T_a T_b$ DE T_a e T_b COMO APLICAÇÕES SOBRE G?

$$(T_a T_b)(x) = T_a(T_b(x)) = a(bx) = (ab)x = T_{ab}(x) \quad \therefore T_a T_b = T_{ab}$$

DEF: $\varphi : G \longrightarrow Sym(G)$, $\varphi(a) = T_a$, $\forall a \in G$.

PELO VISTO ACIMA, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in G$, $\therefore \varphi$ é HOMOMORFISMO DE GRUPOS

. φ É <u>INJETORA</u>: SUPONHA $\varphi(a) = \varphi(b)$ ie $T_a = T_b$ $\therefore a = T_a(e) = T_b(e) = b$

. $\varphi(G) = \{T_a \mid a \in G\}$ é SUBGRUPO DE $Sym(G)$.

PROVAMOS O TEOREMA DE CAYLEY:

TEOREMA (CAYLEY): TODO GRUPO G É ISOMORFO A ALGUM SUBGRUPO DE $\mathrm{Sym}(S)$ PARA ALGUM S APROPRIADO.

VIMOS QUE $G \hookrightarrow \mathrm{Sym}(G)$.

QUANDO G É FINITO, PODEMOS TOMAR O CONJUNTO S FINITO.

NESTE CASO, $\mathrm{Sym}(S) = S_n$. E OS SEUS ELEMENTOS SÃO PERMUTAÇÕES.

$\therefore$ TODO GRUPO FINITO PODE SER REPRESENTADO COMO GRUPO DE PERMUTAÇÕES.

VIMOS: G grupo, $H \leq G$: $a \underset{e}{\sim} b \overset{def}{\iff} a^{-1}b \in H$ $\forall a,b \in G$.

$\sim$ relação de equivalência:

$\bar{a} = [a] = \{x \in G \mid x \sim a\} = aH$. E $G = \bigcup_{g \in G} gH$

$[G:H]$ = # classes laterais de H em G.

$G/_{\sim} = \frac{G}{H} = \{\bar{a} \mid a \in G\}$ CONJUNTO QUOCIENTE DE G PELA RELAÇÃO $\sim$

DESEJAMOS DAR ESTRUTURA DE GRUPO PARA G/H.

DEF: SEJA G GRUPO, $H \leq G$. DIZEMOS QUE H É UM SUBGRUPO NORMAL DE G (denotado $H \trianglelefteq G$), se $gH = Hg$, $\forall g \in G$.

G grupo, $H \triangleleft G$, $G/H = \{gH : g \in G\}$.

DEF: $uH \cdot vH := uvH$; $u, v \in G$

A OPERAÇÃO ESTÁ BEM DEFINIDA

SUPONHA $uH = u_1H$, $vH = v_1H$.

QUEREMOS MOSTRAR QUE $uH \cdot vH = u_1H \cdot v_1H$; ie $uvH = u_1v_1H$.

$uvH = u_1v_1H \longleftrightarrow (uv)^{-1}u_1v_1 \in H \longleftrightarrow v^{-1}u^{-1}u_1v_1 \in H$

Como $uH = u_1H \longrightarrow u^{-1}u_1 \in H \longrightarrow u^{-1}u_1 = h_1$, para algum $h_1 \in H$

$vH = v_1H \longrightarrow v^{-1}v_1 \in H \longrightarrow v^{-1}v_1 = h_2$, para algum $h_2 \in H$.

$\therefore v^{-1}u^{-1}u_1v_1 = v^{-1}(h_1)v_1 = h_2(v_1^{-1}h_1v_1) \in H$, pois $h_2 \in H$

e $v_1^{-1}h_1v_1 \in H$ ($H \overset{\text{pois}}{\triangleleft} G$)

$\therefore$ COM A OPERAÇÃO DEFINIDA ACIMA

G/H ADMITE ESTRUTURA DE GRUPO

$G/H \rightarrow$ GRUPO QUOCIENTE DE G POR H

$1H \rightarrow$ EL. NEUTRO DE G/H

OBS: 1) · SEJA G GRUPO, $H \leq G$.

SÃO EQUIVALENTES:

(i) $H \triangleleft G$

(ii) $gH = Hg$, $\forall g \in G$

(iii) $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$

(iv) $gHg^{-1} \subseteq H$, $\forall g \in G$

(v) $g^{-1}Hg = H$, $\forall g \in G$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). SEJA $h \in H$, $g \in G$.

$$h = g\underbrace{(g^{-1}hg)}_{\in H,\ \text{por Hipótese}}g^{-1} \subseteq gHg^{-1}$$

OBS: NOTE QUE $gHg^{-1} = H$ <u>NÃO</u> SIGNIFICA QUE $ghg^{-1} = h$, $\forall h \in H$.
APENAS QUE O CONJUNTO gHg^{-1} É IGUAL AO CONJUNTO H.

EXEMPLO: $S_3 = \{e, (12); (13); (23); (123); (132)\}$.

SEJA $H = \langle (12) \rangle = \{e, (12)\}$.

$eH = H = \{e, (12)\}$

$(12)H = \{(12); (12)(12)\} = \{(12); e\}$

$(13)H = \{(13); (13)(12)\} = \{(13), (123)\}$

$(23)H = \{(23); (23)(12)\} = \{(23); (132)\}$

$(123)H = \{(123); (123)(12)\} = \{(123); (13)\}$

$(132)H = \{(132); (132)(12)\} = \{(132); (23)\}$

$He = H = \{e, (12)\}$

$H(12) = \{(12), (12)(12)\} = \{(12), e\}$

$H(13) = \{(13); (12)(13)\} = \{(13); (132)\}$

$H(23) = \{(23); (12)(23)\} = \{(23); (123)\}$

$H(123) = \{(123), (12)(123)\} = \{(123); (23)\}$

$H(132) = \{(132); (12)(132)\} = \{(132); (13)\}$

OBSERVE QUE:

$(13)H \neq H(13)$

$\therefore H \ntrianglelefteq G$.

Ex: DETERMINE TODOS OS SUBGRUPOS NORMAIS DE S_3 e D_4.

· SEJA G GRUPO:

$Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg, \forall g \in G\}$, CENTRO DO GRUPO G.

· $Z(G) \leq G$. (EXERCÍCIO)

$x, y \in Z(G) \to xy \in Z(G)$?

$x \in Z(G) \to x^{-1} \in Z(G)$?

·· $Z(G) \trianglelefteq G$.

DE FATO: SEJA $x \in Z(G)$, $g \in G$.

ENTÃO: $gxg^{-1} = x \in Z(G)$, $\forall g \in G$ $\therefore Z(G) \trianglelefteq G$.

·· DEF: $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $a, b \in G$ O COMUTADOR DOS ELEMENTOS a E b.

DEF: $G' = \langle [a,b] \mid a, b \in G \rangle$ O SUBGRUPO DOS COMUTADORES (OU DERIVADO) DE G.

Exerc: MOSTRE QUE $G' \trianglelefteq G$ e G/G' ABELIANO

··· SE G É GRUPO ABELIANO, TODO SUBGRUPO DE G É NORMAL EM G.

SEJA G GRUPO,

DEFINIMOS A SEGUINTE RELAÇÃO SOBRE G:

$$a \sim b \longleftrightarrow b = x^{-1} a x, \text{ PARA ALGUM } x \in G.$$

MOSTRE-QUE: (i) $\sim$ É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

(ii) DETERMINE A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DE UM ELEMENTO $a \in G$.

(A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DO ELEMENTO a É DENOMINADA CLASSE DE CONJUGAÇÃO DE a)

RECORDE: $\varphi: G \longrightarrow G'$ É HOMOMORFISMO DE GRUPOS SE:

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \forall x, y \in G.$$

DEF: $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) : x \in G\} \longrightarrow$ CONJUNTO IMAGEM DE φ.

- $\operatorname{Im}\varphi \leq G'$ (EXERCÍCIO)

DEF: DEFINIMOS O KERNEL (OU NÚCLEO) DE φ, DENOTADO $\operatorname{Ker}\varphi$, COMO O CONJUNTO $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e\}$.

TEO: SE $\varphi: G \to G'$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS. ENTÃO $\operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq G$.

Dem: • $\operatorname{Ker}\varphi \leq G$:

• $x, y \in \operatorname{Ker}\varphi \overset{?}{\Rightarrow} xy \in \operatorname{Ker}\varphi$ ✓

$x, y \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(x) = e = \varphi(y) \therefore \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = e \cdot e = e$

• $x \in \operatorname{Ker}\varphi \overset{?}{\Rightarrow} x^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$.

(Ex) $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = e^{-1} = e \quad \therefore x^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Ex: MOSTRE QUE SE $\varphi: G \to G'$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS, $a \in G$. ENTÃO $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

$Ker\varphi \triangleleft G$: SEJA $g \in G$, $k \in Ker\varphi$.

$\therefore \varphi(k) = e$.

$\therefore \varphi(g^{-1}kg) = \varphi(g^{-1}) \cdot \varphi(k)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}e \cdot \varphi(g) = e$. $\forall g \in G$.

$\therefore g^{-1}kg \in Ker\varphi$, $\forall g \in G$ $\therefore$

$\therefore Ker\varphi \triangleleft G$

COMO O CONJUNTO $\overline{Ker}\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e\}$.

<u>TEO</u>: SE $\varphi: G \to G'$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS. ENTÃO $Ker\varphi \triangleleft G$.

<u>Dem</u>: $\cdot$ $Ker\varphi \leq G$: ?

$\cdot$ $x, y \in Ker\varphi \overset{?}{\Rightarrow} xy \in Ker\varphi$ ✓

$x, y \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) = e = \varphi(y)$ $\therefore$ $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = e \cdot e = e$

$\cdot$ $x \in Ker\varphi \overset{?}{\Rightarrow} x^{-1} \in Ker\varphi$.

$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = e^{-1} = e$ $\therefore x^{-1} \in Ker\varphi$.

<u>Ex</u>: MOSTRE QUE SE $\varphi: G \to G'$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS, $a \in G$. ENTÃO $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

easy office