Introdução a Teoria dos Grupos – MAT 113 – Pós Mat – UFABC-QS2020.2

PROP: SEJAM H, K SUBGRUPOS DO GRUPO G.

ENTÃO HK É SUBGRUPO DE $G \iff HK = KH$.

DEM: $(\Leftarrow)$ SUPONHA $HK = KH$.

· SEJAM $a, b \in HK$. QUEREMOS MOSTRAR QUE $ab \in HK$ e $a^{-1} \in HK$.

SEJAM $a = h_1 k_1$, p/ ALGUM $h_1 \in H$, p/ ALGUM $k_1 \in K$

$b = h_2 k_2$, p/ ALGUM $h_2 \in H$, p/ ALGUM $k_2 \in K$.

$\therefore ab = h_1 k_1 h_2 k_2$.

Como $HK = KH \rightarrow k_1 h_2 \in KH = HK \rightarrow k_1 h_2 = h_3 k_3$, p/ algum $h_3 \in H$
p/ algum $k_3 \in K$.

$\therefore ab = h_1 k_1 h_2 k_2 = \underbrace{h_1 h_3}_{\in H} \underbrace{k_3 k_2}_{\in K} \in HK$.

$a^{-1} = (h_1 k_1)^{-1} = k_1^{-1} h_1^{-1} \in KH = HK$.

$\therefore HK \leq G$.

PROP: SEJAM H, K SUBGRUPOS DO GRUPO G.

ENTÃO HK É SUBGRUPO DE $G \iff HK = KH$.

DEM: ($\Longrightarrow$) SEJA $\alpha \in KH$. ENTÃO $\alpha = kh$, p/ algum $k \in K$, $h \in H$.

$\alpha^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{COMO } HK \text{ É SUBGRUPO DE } G\\ \alpha^{-1} \in HK\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in HK. \qquad \therefore KH \subseteq HK.$$

$\therefore$ SEJA $\gamma \in HK$, COMO $HK \leq G \rightarrow \gamma^{-1} \in HK$.

$\therefore \gamma^{-1} = h_2 k_2$, p/ algum $h_2 \in H$, $k_2 \in K$.

TOMANDO INVERSOS, $\gamma = k_2^{-1} h_2^{-1} \in KH$. $\qquad \therefore HK \subseteq KH$.

DONDE $HK = KH$.

COROLÁRIO: SEJAM H, K SUBGRUPOS DO GRUPO G; $H \leq N_G(K)$
ENTÃO HK É SUBGRUPO DE G.
EM PARTICULAR, SE $K \lhd G$ ENTÃO $HK \leq G$, PARA QUALQUER $H \leq G$.

DEM: MOSTRAREMOS QUE $HK = KH$
SEJAM $h \in H$, $k \in K$.
POR HIPÓTESE, $H \leq N_G(K) \longrightarrow hkh^{-1} \in K$, $\forall k \in K$.

$$\therefore hk = \underbrace{(hkh^{-1})}_{\in K}\underbrace{h}_{\in H} \in KH.$$

COM RACIOCÍNIO ANÁLOGO, $kh = h\underbrace{(h^{-1}kh)}_{\in K} \in HK$.

SEJA G GRUPO, $H \triangleleft G$.

DEFINIMOS
$$\begin{aligned}\pi : G &\longrightarrow \frac{G}{H}\\ g &\longmapsto gH\end{aligned}$$

É FÁCIL DE VER QUE π É HOMOMORFISMO DE GRUPOS SOBREJETOR

π É DENOMINADO EPIMORFISMO OU HOMOMORFISMO CANÔNICO DE G EM $\frac{G}{H}$.

1º TEOREMA DO ISOMORFISMO:

SEJA $\Phi: G \longrightarrow H$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS. ENTÃO $\operatorname{Im}\Phi \cong \dfrac{G}{\operatorname{Ker}\Phi}$.

DEM:

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[d, mapsto] & G \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Im}\Phi \subset H \\
g\operatorname{Ker}\Phi & \dfrac{G}{\operatorname{Ker}\Phi} \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

$g \longmapsto \Phi(g)$

π: PROJEÇÃO CANÔNICA

DESEJAMOS DEFINIR $\psi: \dfrac{G}{\operatorname{Ker}\Phi} \longrightarrow \operatorname{Im}\Phi$

DE MODO QUE $\psi \circ \pi = \Phi$.

DEF: $\psi: \dfrac{G}{\operatorname{Ker}\Phi} \longmapsto \operatorname{Im}\Phi$

$g\operatorname{Ker}\Phi \longmapsto \Phi(g)$ ie $\psi(g\operatorname{Ker}\Phi) = \Phi(g)$

I) ψ ESTÁ BEM DEFINIDA:

SUP. $g_1\operatorname{Ker}\Phi = g_2\operatorname{Ker}\Phi$

$\longleftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in \operatorname{Ker}\Phi$

$\longrightarrow \Phi(g_1^{-1}g_2) = e_H$

omo $\longrightarrow \Phi(g_1^{-1})\cdot\Phi(g_2) = e_H$

$\longrightarrow \Phi(g_1) = \Phi(g_2)$

II) ψ É SOBREJETORA

SEJA $y \in \operatorname{Im}\psi$

$\therefore y = \Phi(g_0)$, p/ algum $g_0 \in G$.

CLARAMENTE, $\psi(g_0\operatorname{Ker}\Phi) = \Phi(g_0) = y$

$\therefore$

III) ψ INJETORA

SUP. $\psi(g_1\operatorname{Ker}\Phi) = \psi(g_2\operatorname{Ker}\Phi)$

$\to \Phi(g_1) = \Phi(g_2)$

$\to \Phi(g_1)^{-1}\cdot\Phi(g_2) = e_H$

$\to \Phi(g_1^{-1})\Phi(g_2) = e_H$

$\to \Phi(g_1^{-1}g_2) = e_H$

$\to g_1^{-1}g_2 \in \operatorname{Ker}\Phi$

$\to g_1\operatorname{Ker}\Phi = g_2\operatorname{Ker}\Phi$

1º TEOREMA DO ISOMORFISMO:

SEJA $\Phi : G \longrightarrow H$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS. ENTÃO $\operatorname{Im}\Phi \cong \dfrac{G}{\operatorname{Ker}\Phi}$.

DEM:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Im}\Phi \subset H \\
\dfrac{G}{\operatorname{Ker}\Phi} \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c} g \\ \downarrow \\ g\operatorname{Ker}\Phi \end{array}
\qquad
g \longmapsto \Phi(g)
$$

DEF: $\psi : \dfrac{G}{\operatorname{Ker}\Phi} \longrightarrow \operatorname{Im}\Phi$

$$g\operatorname{Ker}\Phi \longmapsto \Phi(g)$$

. ψ É HOMOMORFISMO DE GRUPOS:

$$\psi(g_1\operatorname{Ker}\Phi \cdot g_2\operatorname{Ker}\Phi) = \psi(g_1 g_2 \operatorname{Ker}\Phi) \overset{\text{def}}{=} \Phi(g_1 g_2)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \Phi \text{ HOMOMORFISMO} \\ \text{DE GRUPOS}}}{=} \Phi(g_1)\cdot\Phi(g_2) \underset{\text{def}}{=} \psi(g_1\operatorname{Ker}\Phi)\cdot\psi(g_2\operatorname{Ker}\Phi)$$

$\therefore$ ψ É HOMOMORFISMO DE GRUPOS, BIJETOR

$$\therefore \frac{G}{\operatorname{Ker}\Phi} \cong \operatorname{Im}\Phi \qquad \square$$

1º TEOREMA DO ISOMORFISMO:

SEJA $\Phi : G \longrightarrow H$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS. ENTÃO $\mathrm{Im}\,\Phi \cong \dfrac{G}{\mathrm{Ker}\,\Phi}$.

EXEMPLOS: SEJAM $GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A$ É INVERSÍVEL $\}$

E $SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$

. MOSTRE QUE $GL_n(\mathbb{R})$ E $SL_n(\mathbb{R})$ SÃO SUBGRUPOS DE $M_n(\mathbb{R})$ COM O PRODUTO USUAL DE MATRIZES.

.. MOSTRE QUE $\dfrac{GL_n(\mathbb{R})}{SL_n(\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^*$

2º) TEOREMA DO ISOMORFISMO:

SEJA G GRUPO, A, B SUBGRUPOS DE G, SUPONHA $A \leq N_G(B)$
ENTÃO AB É SUBGRUPO DE G; $B \lhd AB$; $A \cap B \lhd A$ E

E $\dfrac{AB}{B} \cong \dfrac{A}{A \cap B}$.

DEM: PELA PROPOSIÇÃO,
$AB \leq G$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{COMO } A \leq N_G(B) \ \text{(HIPÓTESE)} \\ \text{E } B \leq N_G(B) \ \text{(TRIVIALMENTE)} \end{array}\right\} \Rightarrow B \lhd AB.$$

$\therefore$ O QUOCIENTE $\dfrac{AB}{B}$ ESTÁ BEM DEFINIDO.

DEF: $\varphi : A \longrightarrow \dfrac{AB}{B}$

$\varphi(a) = aB$.

· φ é HOMOMORFISMO DE GRUPOS

$\varphi(a_1 a_2) = (a_1 a_2)B = a_1 B a_2 B =$
$= \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)$

$\therefore$ φ É SOBREJETORA IMEDIATO

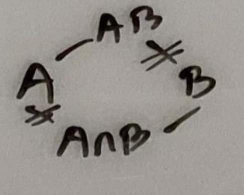
OBSERVE QUE

$e_{\frac{AB}{B}} = 1B$

$\ker \varphi = \{ a \in A \mid \varphi(a) = e_{\frac{AB}{B}} \} =$
$= \{ a \in A \mid aB = 1B \} = A \cap B$.

$\therefore$ PELO 1º T. ISOMORFISMO:

$\dfrac{AB}{B} \cong \dfrac{A}{A \cap B}$.



3º) TEOREMA DO ISOMORFISMO:

SEJA G GRUPO, SEJAM $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, COM $H \subseteq K$.

ENTÃO: $\frac{K}{H} \triangleleft \frac{G}{H}$ É $\frac{\left(\frac{G}{H}\right)}{\left(\frac{K}{H}\right)} \cong \frac{G}{K}$.

$\exists k_1 \in K$ tq

DEM: $g \in G$, $k \in K$. como $K \triangleleft G \to gkg^{-1} \in K \to gkg^{-1} = k_1 \in K$

$gH . kH . g^{-1}H \underset{\substack{\uparrow \\ H \triangleleft G}}{=} gkg^{-1}H$.

$\therefore gH\, kH\, g^{-1}H = gkg^{-1}H = k_1 H \in K/H$, $\forall gH \in G/H$ $\therefore \frac{K}{H} \triangleleft \frac{G}{H}$.

easy office

$3^{\underline{o}}$) **TEOREMA DO ISOMORFISMO:**

SEJA G GRUPO, SEJAM $H \lhd G$, $K \lhd G$, COM $H \subseteq K$.

ENTÃO: $\frac{K}{H} \lhd \frac{G}{H}$ É $\frac{\left(\frac{G}{H}\right)}{\left(\frac{K}{H}\right)} \cong \frac{G}{K}$.

DEM: DEF $\varphi : \frac{G}{H} \longrightarrow \frac{G}{K}$

$gH \longmapsto gK$.

· φ ESTÁ BEM DEFINIDA

SUPONHA $g_1 H = g_2 H$.

$\therefore g_1 = g_2 h$, para algum $h \in H$

Como $H \subseteq K \longrightarrow h \in K$.

$\therefore g_1 K = g_2 K$.

ie $\varphi(g_1 H) = \varphi(g_2 H)$

· φ É SOBRE:

IMEDIATO DA DEFINIÇÃO DE φ

SE $g_0 K \in \frac{G}{K}$

ENTÃO TOME $g_0 H$ EM $\frac{G}{H}$ E

$\varphi(g_0 H) = g_0 K$

É FÁCIL DE VER QUE φ É UM HOMOMORFISMO DE GRUPOS.

$\ker \varphi = \left\{ gH \in \frac{G}{H} \,\middle|\, \varphi(gH) = 1K \right\}$

$= \left\{ gH \in \frac{G}{H} \,\middle|\, gK = 1K \right\}$

$= \left\{ gH \in \frac{G}{H} \,\middle|\, g \in K \right\} = \frac{K}{H}$

Pelo $1^{\underline{o}}$ T. do Isomorfismo:

$\frac{G}{K} \cong \frac{\left(\frac{G}{H}\right)}{\left(\frac{K}{H}\right)}$ $\square$