Introdução a Teoria dos Grupos – MAT 113 – Pós Mat – UFABC-QS2020.2

LEMA: SEJA $f: G \to \tilde{G}$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS

SEJA $H \leq G$. ENTÃO $f(H)$ É SUBGRUPO DE $\tilde{G}$ E $f^{-1}(f(H)) = H(\ker f)$

DEM: SEJA $h \in H$, $k \in \ker f$.

hk

$\because f(hk) = f(h)f(k) = f(h)e_{\tilde{G}} = f(h) \in f(H)$ $\therefore H(\ker f) \subseteq f^{-1}(f(H))$.

PARA A OUTRA INCLUSÃO:

TOME $y \in f^{-1}(f(H)) \xrightarrow{\text{DEFINIÇÃO}} f(y) \in f(H) \longrightarrow f(y) = f(h)$, p/ algum $h \in H$

MULTIPLICANDO por $f(h^{-1})$ À ESQUERDA, temos $f(h)^{-1}f(y) = e_{\tilde{G}} \longrightarrow h^{-1}y \in \ker f$

$\therefore y = h(h^{-1}y) \in H(\ker f)$. $\therefore f^{-1}(f(H)) \subseteq H(\ker f)$ $\therefore f^{-1}(f(H)) = H(\ker f)$.

Note que A IGUALDADE $f^{-1}(f(H)) = H(\ker f)$ IMPLICA QUE $f^{-1}(f(H))$ É SUBGRUPO DE G, pois $\ker(f) \trianglelefteq G$.

LEMA: SE $\tilde{H} \leq \tilde{G}$ ENTÃO $f^{-1}(\tilde{H})$ É UM SUBGRUPO DE G CONTENDO $\ker f$ e $f(f^{-1}(\tilde{H})) = \tilde{H} \cap \mathrm{Im}(f)$.

DEM:

$\tilde{H} \leq \tilde{G} \longrightarrow e_{\tilde{G}} \in H$ $\therefore$ TEMOS $f^{-1}(\tilde{H}) \supseteq f^{-1}(e_{\tilde{G}}) = \ker f$.

· $f^{-1}(\tilde{H})$ é SUBGRUPO DE G (EXERCÍCIO)

Af: $f(f^{-1}(\tilde{H})) = \tilde{H} \cap \mathrm{Im} f$

· A INCLUSÃO $f(f^{-1}(\tilde{H})) \subseteq \tilde{H} \cap \mathrm{Im} f$ (TRIVIAL)

·· TOME $y \in \tilde{H} \cap \mathrm{Im} f \longrightarrow (\exists g \in G)\ f(g) = y$.

COMO $y \in \tilde{H} \longrightarrow g \in f^{-1}(\tilde{H})$ $\therefore$ $y = f(g) \in f(f^{-1}(\tilde{H}))$.

NO CASO PARTICULAR EM QUE $f: G \to \tilde{G}$ É HOMOMORFISMO SOBREJETOR TEMOS $f(f^{-1}(\tilde{H})) = \tilde{H}$.

TEOREMA DA CORRESPONDÊNCIA:

SEJA $f: G \to \tilde{G}$ HOMOMORFISMO DE GRUPOS. ENTÃO AS SEGUINTES FUNÇÕES:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{SUBGRUPOS DE } G \\ \text{QUE CONTÉM } \ker f \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \text{SUBGRUPOS DE } f(G) \right\}$$

$$H \longmapsto f(H)$$

$$f^{-1}(\tilde{H}) \longleftarrow\!\shortmid \tilde{H}$$

SÃO BIJEÇÕES INVERSAS UMA DA OUTRA.

ALÉM DISSO, ESTAS BIJEÇÕES LEVAM SUBGRUPOS NORMAIS EM SUBGRUPOS NORMAIS, i.e:

a) $H \lhd G \Longrightarrow f(H) \lhd f(G)$

b) $\tilde{H} \lhd f(G) \Rightarrow f^{-1}(\tilde{H}) \lhd G$.

DEM: NOS LEMAS ANTERIORES VIMOS:

$$f^{-1}(f(H)) = H(\ker f), \quad \forall H \leq G,$$

$$f(f^{-1}(\tilde{H})) = \tilde{H} \cap f(G), \quad \forall \tilde{H} \leq \tilde{G}$$

DAÍ SE $H \supseteq \ker f$ ENTÃO $f^{-1}(f(H)) = H$ E SE

SE $\tilde{H} \subseteq f(G)$ ENTÃO $f(f^{-1}(\tilde{H})) = \tilde{H}$

OBTEMOS QUE AS DUAS FUNÇÕES DEFINIDAS NO ENUNCIADO DO TEOREMA SÃO UMA A INVERSA DA OUTRA.

BASTA PROVAR a) e b) NO TEOREMA.

(a) DADOS $y \in f(G)$, $x \in f(H)$ ARBITRÁRIOS

QUEREMOS MOSTRAR QUE $yxy^{-1} \in f(H)$.

$\therefore$ $y = f(g)$ e $x = f(h)$ PARA ALGUNS $g \in G$, $h \in H$.

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\ yxy^{-1} = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(ghg^{-1}) \\ \text{COMO } H \triangleleft G \longrightarrow ghg^{-1} \in H \end{array}\right\} \longrightarrow yxy^{-1} \in f(H)$$

(b) DADOS $g \in G$ e $\alpha \in f^{-1}(\tilde{H})$ ARBITRÁRIOS

DEVEMOS MOSTRAR QUE $g\alpha g^{-1} \in f^{-1}(\tilde{H})$.

TEMOS $f(g\alpha g^{-1}) = f(g)f(\alpha)f(g)^{-1}$ e $f(\alpha) \in \tilde{H}$.

POR HIPOTESE, $\tilde{H} \triangleleft f(G) \longrightarrow f(g\alpha g^{-1}) \in \tilde{H}$

$\therefore\ g\alpha g^{-1} \in f^{-1}(\tilde{H})$ ∎