Introdução a Teoria dos Grupos – MAT 113 – Pós Mat – UFABC- QS2020.2

- <u>LAGRANGE</u>:

SEJA G GRUPO FINITO, $H \leq G$. ENTÃO $|H| \,\big|\, |G|$.

<u>VALE A RECÍPROCA</u>?

SEJA G GRUPO FINITO, $k \in \mathbb{N}$, $k \,\big|\, |G|$.

EXISTE $H \leq G$, $|H| = k$. ?

- A RECÍPROCA VALE PARA GRUPOS CÍCLICOS.
- NÃO VALE EM GERAL. TOME A_4. NÃO POSSUI SUBGRUPO DE ORDEM 6.
- A RECÍPROCA VALE PARA GRUPOS $|G| \leq 11$
- VALEM RESPOSTAS PARCIAIS PARA A RECÍPROCA:

EX: TEOREMA DE CAUCHY.

SE p PRIMO, $p \,\big|\, |G|$ ENTÃO G POSSUI UM ELEMENTO DE ORDEM p.
G GRUPO FINITO

AÇÃO DE UM GRUPO EM UM CONJUNTO:

DEF: SEJA G GRUPO, X CONJUNTO (NÃO VAZIO)

UMA AÇÃO DE G SOB X É UMA APLICAÇÃO:

$$\cdot \; G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x$$

SATISFAZENDO

- PARA TODO $x \in X$, $e \cdot x = x$, ONDE $e \rightarrow$ ELEMENTO NEUTRO DE G
- PARA TODO $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$, $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$

OBS: SEJA G GRUPO QUE AGE SOBRE O CONJUNTO X:

PARA CADA $g \in G$, SEJA APLICAÇÃO DEFINIDA POR

$$\sigma_g : X \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto g \cdot x = \sigma_g(x)$$

DEM: PARA TODO $x \in X$;

$(\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g)(x) = \sigma_{g^{-1}}(\sigma_g(x)) \longrightarrow$ DEF. DE COMPOSIÇÃO DE FUNÇÃO.

$= g^{-1} \cdot (g \cdot x) \longrightarrow$ DEF DE $\sigma_{g^{-1}}$ E σ_g.

$= (g^{-1} g) \cdot x \longrightarrow$ DEF DE AÇÃO

$= e \cdot x = x \longrightarrow$ DEF DE AÇÃO

$\therefore \sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g : A \longrightarrow A$ É A APLICAÇÃO IDENTIDADE.

ANALOGAMENTE, $\sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}} : A \longrightarrow A$ É A APLICAÇÃO IDENTIDADE.

$\therefore \sigma_g$ POSSUI INVERSA A DIREITA E A ESQUERDA

$\therefore \sigma_g \in Sym(X)$

OBS: (ii) SEJA $\varphi: G \longrightarrow Sym(X)$ DEF $\varphi(g) = \sigma_g$

$$g \longmapsto \sigma_g$$

Por (i), $\sigma_g \in Sym(X)$.

DEVEMOS MOSTRAR QUE $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$

AS PERMUTAÇÕES $\varphi(g_1 g_2)$ E $\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ SÃO IGUAIS

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(g_1 g_2)(x) = (\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2))(x) \; ; \; \forall x \in X.$$

$$\begin{aligned}
\varphi(g_1 g_2)(x) &= \sigma_{g_1 g_2}(x) \\
&= (g_1 g_2) \cdot x \\
&= g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \quad \text{DEF DE AÇÃO} \\
&= \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) \\
&= (\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2))(x)
\end{aligned}$$

O HOMOMORFISMO φ É CHAMADO REPRESENTAÇÃO POR PERMUTAÇÃO ASSOCIADA A AÇÃO.

O PROCESSO ANTERIOR É REVERSÍVEL NO SEGUINTE SENTIDO:

SE $\varphi: G \longrightarrow Sym(X)$ É HOMOMORFISMO DO GRUPO G NO GRUPO $Sym(X)$.

ENTÃO A APLICAÇÃO DE $G \times X \longrightarrow X$

DEFINIDA POR $g \cdot x := \varphi(g)(x)$ $\forall g \in G, \forall x \in X$.

SATISFAZ AS PROPRIEDADES DE AÇÃO DE G SOBRE X.

MOSTRAMOS QUE SÃO EQUIVALENTES: SEJAM G GRUPO, X CONJUNTO

(i) O GRUPO G AGE NO CONJUNTO X

(ii) EXISTE UM HOMOMORFISMO $\varphi: G \to Sym(X)$

EXEMPLOS: Seja G grupo, X conjunto não vazio:

(1) Seja $g.x = x$, $\forall g \in G$, $x \in X$.

↳ AÇÃO TRIVIAL (DIZEMOS QUE G AGE TRIVIALMENTE SOBRE X)

OBSERVE QUE ELEMENTOS DISTINTOS DE G INDUZEM A MESMA REPRESENTAÇÃO SOB X (NESTE CASO, A PERMUTAÇÃO IDENTIDADE)

A REPRESENTAÇÃO DE PERMUTAÇÃO ASSOCIADA $G \longrightarrow Sym(X)$ É O HOMOMORFISMO TRIVIAL (QUE LEVA TODO ELEMENTO DE G PARA A IDENTIDADE)

SE G AGE SOB UM CONJUNTO B E ELEMENTOS DISTINTOS DE G INDUZEM PERMUTAÇÕES DISTINTAS DE B, A AÇÃO É DITA FIEL.

EXEMPLOS: (2) X CONJUNTO NÃO VAZIO, $Sym(X)$ AGE SOB X

por $$Sym(X) \times X \longrightarrow X$$
$$(\sigma, x) \longmapsto \sigma \cdot x = \sigma(x), \ \forall \sigma \in Sym(x), \ x \in X$$

A REPRESENTAÇÃO POR PERMUTAÇÃO ASSOCIADA É A APLICAÇÃO IDENTIDADE.

G GRUPO, X CONJUNTO NÃO VAZIO.

SEJA G AGINDO SOB X. PARA CADA $g \in G$, $\sigma_g : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto \sigma_g(x) = g \cdot x$

$\sigma_g \in Sym(X)$.

A ASSOCIADO A AÇÃO DE G sob X: $\exists$ homomorfismo
$$\varphi : G \longrightarrow Sym(X)$$
$$g \longmapsto \varphi(g) = \sigma_g$$

DEF: O KERNEL DA AÇÃO É O CONJUNTO DOS ELEMENTOS DE G QUE AGEM TRIVIALMENTE SOB TODO ELEMENTO DE A: $\{g \in G \mid g \cdot a = a, \ \forall a \in A\}$

· PARA CADA $x \in X$, O ESTABILIZADOR DE x EM G É O CONJUNTO DE ELEMENTOS DE G QUE FIXAM O ELEMENTO x: $\{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ E É DENOTADO G_x OU $Stab_G(x)$

∴ UMA AÇÃO É FIEL SE O SEU KERNEL É A IDENTIDADE.

DEF: O KERNEL DA AÇÃO É O CONJUNTO DOS ELEMENTOS DE G QUE AGEM TRIVIALMENTE SOB TODO ELEMENTO DE A: $\{g \in G \mid g \cdot a = a, \forall a \in A\}$

PROP: SEJA G GRUPO AGINDO SOB UM CONJUNTO X (NÃO VAZIO)
A RELAÇÃO SOB X DEFINIDA POR

$$a \sim b \longleftrightarrow a = g \cdot b, \text{ PARA ALGUM } g \in G.$$

É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.
PARA CADA $x \in X$, O NÚMERO DE ELEMENTOS NA CLASSE DE EQUIVALÊNCIA CONTENDO x É $[G : G_x]$.

DEF: SEJA G GRUPO AGINDO NUM CONJUNTO NÃO VAZIO X.
(i) A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA $\{g \cdot x \mid g \in G\}$ É CHAMADA A ÓRBITA DE G CONTENDO x

(ii) A AÇÃO DE G SOB X É CHAMADA TRANSITIVA SE EXISTE SOMENTE UMA ÓRBITA, I.E. DADO QUAISQUER ELEMENTOS $a, b \in X$, EXISTE ALGUM $g \in G$ T.Q. $a = g \cdot b$.

easy office

- Errata
- Nos slides 8 e 9, na definição de Kernel, onde se encontra "A" leia-se "X".
- No slide 4, na penúltima linha, leia-se "\sigma_{g^{-1}}\sigma_g: X em X é a aplicação identidade. Analogamente, \sigma_g \sigma_{g^{-1}}: X em X é a aplicação identidade.