Introdução a Teoria dos Grupos – MAT 113 – Pós Mat – UFABC- QS2020.2

SEJA G GRUPO AGINDO NO CONJUNTO A (NÃO VAZIO)

A RELAÇÃO SOBRE A, DEF. POR

$$a \sim b \iff a = g \cdot b, \text{ PARA ALGUM } g \in G.$$

É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

PARA CADA $a \in A$. O NÚMERO DE ELEMENTOS NA CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DE a É $[G : G_a]$

(i.e. $|\mathcal{O}_a| = [G : G_a]$, $\mathcal{O}_a$ É A ÓRBITA DE G CONTENDO a.

DEM. (i) $a = 1 \cdot a \quad \forall a \in A \quad \therefore a \sim a$. (VALE A REFLEXIVA)

(ii) $a \sim b \to a = g \cdot b, \exists g \in G \to g^{-1} \cdot a = g^{-1} \cdot (g \cdot b) \underset{\text{AÇÃO}}{=} (g^{-1} g) \cdot b = e \cdot b \overset{\text{AÇÃO}}{=} b \quad \therefore b \sim a.$

(iii) $a \sim b \to a = g \cdot b, \exists g \in G$
e
$b \sim c \to b = h \cdot c, \exists h \in G$

$\Rightarrow a = g \cdot (h \cdot c) \underset{\text{AÇÃO}}{=} (gh) \cdot c \quad \therefore a \sim c$

$\sim$ É DE EQUIVALÊNCIA

easy office

PARA A ÚLTIMA OBSERVAÇÃO:

MOSTRAREMOS QUE EXISTE UMA BIJEÇÃO ENTRE

$\left\{ \begin{array}{c} \text{classes laterais} \\ \text{à esquerda de } G_a \text{ em } G \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{ \text{elementos de } \mathcal{C}_a \}$

$\mathcal{C}_c$ classe de equivalência do elemento a.

Seja $\mathcal{C}_a = \{g \cdot a \mid g \in G\}$ classe de equivalência do elemento a.

Suponha $b = g \cdot a \in \mathcal{C}_a$, $\underset{\psi}{\text{def}}$: $\psi : \mathcal{C}_a \longrightarrow \{gG_a \mid g \in G\}$

$g \cdot a \longmapsto gG_a$

ψ é EPIMORFISMO, pois $\forall g \in G$, $g \cdot a \in \mathcal{C}_a$.

. ψ é injetiva:

$g \cdot a = g \cdot h \iff h^{-1} g \in G_a \iff gG_a = hG_a$ $\therefore \psi$ é bijetora.

AÇÃO DE UM GRUPO SOB SI MESMO:

- MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA DE G EM SI MESMO:
- CONJUGAÇÃO DE G EM SI MESMO
- MULTIPLICAÇÃO DE G SOBRE O CONJUNTO QUOCIENTE G/H.

EX 1: G AGE SOBRE SI MESMO, POR MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA

$$\begin{cases} G \times G \longrightarrow G \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x = gx \end{cases}$$

$\longrightarrow$ PRODUTO USUAL DE g e x.

OBS: $e \cdot x = ex = x \quad \forall x \in X = G$

$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1(g_2 x) = (g_1 g_2) x \quad \forall x \in G.$

AÇÃO DE UM GRUPO SOB SI MESMO:

- MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA DE G EM SI MESMO:
- CONJUGAÇÃO DE G EM SI MESMO
- MULTIPLICAÇÃO DE G SOBRE O CONJUNTO QUOCIENTE G/H.

Ex 1: G AGE SOBRE SI MESMO, POR

$$\begin{cases} G \times G \longrightarrow G \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x = gxg^{-1}. \end{cases}$$

1) $e \cdot x = exe^{-1} = x$ e

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (g_2 \cdot x) &= g_1 \cdot (g_2 x g_2^{-1}) \\ &= g_1 (g_2 x g_2^{-1}) g_1^{-1} \\ &= (g_1 g_2) x (g_1 g_2)^{-1} \\ &= (g_1 g_2) \cdot x \end{aligned}$$

AÇÃO DE UM GRUPO SOB SI MESMO:

- MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA DE G EM SI MESMO:
- CONJUGAÇÃO DE G EM SI MESMO
- MULTIPLICAÇÃO DE G SOBRE O CONJUNTO QUOCIENTE G/H.

3) $H \leq G$. $\quad G/H = \{aH : a \in G\}$ → CONJUNTO DAS CLASSES LATERAIS À ESQUERDA DE H em G.

G AGE EM G/H POR MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA:

$$G \times \frac{G}{H} \longrightarrow \frac{G}{H}$$

$$(g, aH) \longmapsto g \cdot aH := gaH = \{gy : y \in aH\}.$$

- $e \cdot aH = aH$

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot aH) = g_1 \cdot (g_2 aH)$$
$$= g_1 g_2 aH$$
$$= (g_1 g_2) \cdot aH$$

G age no conjunto X $(X \neq \emptyset)$

Para $x \in X$, $\operatorname{Stab}_G(x) = G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$.

$\operatorname{Orb}_G(x) = \mathcal{O}_x = \{ g \cdot x \mid g \in G \}$.

Vimos que $\operatorname{Stab}_G(x) \leq G$.

Ex. SEJA $G = \{ Id, (1\,2); (3\,4\,6), (3\,6\,4); (1\,2)(3\,4\,6), (1\,2)(3\,6\,4) \}$

E SEJA $\Phi : G \longrightarrow S_6$, $\Phi(\alpha) = \alpha$, COMO G É UM SUBGRUPO DE S_6.

ENTÃO G AGE EM $\{1,2,3,4,5,6\}$. OBSERVE QUE 5 É fixado por TODO ELEMENTO DE G. TEMOS $\operatorname{STAB}_G(5) = G$ E $\operatorname{orb}_G(5) = \{5\}$.

TEMOS TAMBÉM $\operatorname{stab}_G(3) = \operatorname{stab}_G(4) = \operatorname{stab}_G(6) = \langle (1\,2) \rangle$

$\operatorname{stab}_G(1) = \operatorname{stab}_G(2) = \langle (3\,4\,6) \rangle$.

$\operatorname{orb}_G(3) = \operatorname{orb}_G(4) = \operatorname{orb}_G(6) = \{3,4,6\}$ | $\operatorname{orb}_G(1) = \operatorname{orb}_G(2) = \{1,2\}$.

Ex: Considere S_4 agindo no conjunto de pares de $\{1,2,3,4\}$ segundo a regra $\sigma\{a,b\} := \{\sigma(a), \sigma(b)\}$.

Temos 6 pares:

$x_1 = \{1,2\}$, $x_2 = \{1,3\}$, $x_3 = \{1,4\}$, $x_4 = \{2,3\}$,
$x_5 = \{2,4\}$, $x_6 = \{3,4\}$.

Considere o efeito de $(1\,2)$ nesses pares:

$(1\,2)x_1 = x_1$, $(1\,2)x_2 = x_4$, $(1\,2)x_3 = x_5$
$(1\,2)x_4 = x_2$, $(1\,2)x_5 = x_3$, $(1\,2)x_6 = x_6$.

$\therefore$ Como uma permutação do conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$,
$(1\,2)$ age como $(x_2\,x_4)(x_3\,x_5)$. Nós fazemos uma transposição em S_4
parecer um produto de 2-ciclos em S_6. Em particular,
nós fazemos uma permutação ímpar de $\{1,2,3,4\}$
parecer uma permutação par sob um novo conjunto.

Isso é uma imersão $S_4 \hookrightarrow A_6$

APLICAÇÕES DE AÇÕES DE GRUPOS À TEORIA DE GRUPOS SEGUEM DAS RELAÇÕES ENTRE ÓRBITAS, ESTABILIZADORES E PONTOS FIXOS:

Ex 1: QUANDO UM GRUPO G AGE SOBRE SI MESMO POR MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA:

. EXISTE UMA ÓRBITA $\{g = ge \in Orb_e\}$

.. $Stab_a = \{g : ga = e\} = \{e\}$ É TRIVIAL

... NÃO EXISTEM PONTOS FIXOS (SE $|G| > 1$)

APLICAÇÕES DE AÇÕES DE GRUPOS À TEORIA DE GRUPOS SEGUEM DAS RELAÇÕES ENTRE ÓRBITAS, ESTABILIZADORES E PONTOS FIXOS:

Ex 1: QUANDO UM GRUPO G AGE SOBRE SI MESMO POR CONJUGAÇÃO:

- A ÓRBITA DE a É $Orb_a = \{gag^{-1} \mid g \in G\} \to$ A CLASSE de CONJUGAÇÃO DE a.
- $Stab_a = \{g : gag^{-1} = a\} = \{g : ga = ag\} = C_G(a)$
- a É UM PONTO FIXO QUANDO ELE COMUTA COM TODOS OS ELEMENTOS DE G, $\therefore$ OS PONTOS FIXOS DE CONJUGAÇÃO FORMAM O CENTRO DE G.

APLICAÇÕES DE AÇÕES DE GRUPOS À TEORIA DE GRUPOS SEGUEM DAS RELAÇÕES ENTRE ÓRBITAS, ESTABILIZADORES E PONTOS FIXOS:

Ex 1: QUANDO UM GRUPO G AGE SOBRE G/H (PARA $H \leq G$) POR MULTIPLICAÇÃO À ESQUERDA:

- EXISTE UMA ÓRBITA $\{gH = g \cdot H \in \mathrm{Orb}_H\}$
- $\mathrm{Stab}_{aH} = \{g : gaH = aH\} = \{g : a^{-1}ga \in H\} = aHa^{-1}$.
- NÃO EXISTEM PONTOS FIXOS (SE $H \neq G$).