7.B3

Introdução a Probabilidade e Estatística - P1

Nome:
Data: 05/07/2015.

1. De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?

2. Temos 20 mil reais que devem ser aplicados entre 4 carteiras diferentes. Cada aplicação deve ser feita em múltiplos de mil reais, e os investimentos mínimos que podem ser feitos são de 2, 2, 3 e 4 mil reais. Quantas estratégias de aplicação diferentes existem se

   (a) uma aplicação tiver que ser feita em cada carteira?

   (b) aplicações tiverem que ser feitas em pelo menos 3 das quatro carteiras?

3. Uma urna contém 6 bolas brancas e 9 bolas ne- gras. Se 4 bolas são escolhidas ao acaso e sem reposição, qual a probabilidade de que as duas primeiras bolas escolhidas sejam brancas e as duas últimas bolas escolhidas sejam negras?

4. Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores do Flamengo. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o cobrador for do Flamengo e de 70% em caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:

   (a) Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador do Flamengo e ser convertido?

   (b) Qual a probabilidade do pênalti ser convertido?

   (c) Um pênalti foi marcado a favor do Brasil e acabou de ser desperdiçado. Qual é a probabilidade de que o cobrador tenha sido um jogador do Flamengo?

5. Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade 1/3 de escolher a resposta certa se ele está adivinhando e 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das respostas do exame. Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou?

01) As alternativas são:

4 Homens ; 2 mulheres.

3 Homens ; 3 mulheres,

2 Homens ; 4 mulheres.

$\therefore$ Temos:

$$(C_{7,4} \cdot C_{4,2} + C_{7,3} \cdot C_{4,3} + C_{7,2} \cdot C_{4,4} =$$

$$= 35 \cdot 6 + 35 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = \boxed{371}.$$

02):

Recorde o seguinte lema:

Lema. O número de soluções inteiras, positivas, da equação

$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = p$ é dado por $C_{p-1,m-1} = \binom{p-1}{m-1}$.

$m \geq 1$, $p \geq 1$.

Ou seja, o número de soluções $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = p$, onde cada $x_i \in \mathbb{Z}$ e $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ é dado por $C_{p-1,m-1}$.

Suponha que uma solução da equação seja representada por p bolas:

$$\underbrace{o\ o\ o + o + o \cdots o - o}_{p}.$$

O problema consiste em colocar $m-1$ sinais "+" nos $p-1$ espaços entre as bolas; logo temos $\binom{p-1}{m-1}$ soluções inteiras positivas possíveis.

- Solução do exercício:

(a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 4$.

Sejam $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 - 3$.

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$, $y_4 > 0$

Logo o número de soluções inteiras positivas da equação acima é dado por: $\binom{13-1}{4-1} = \binom{12}{3} = 220$ aplicações possíveis.

(b) Vamos determinar o número de aplicações possíveis em exatamente 3 investimentos inicialmente:

• O número de aplicações possíveis somente nos investimentos 1, 2 e 3 é: dado pelo número de soluções inteiras, positivas da equação.

$y_1 + y_2 + y_3 = 16$, que é igual a $\binom{15}{2}$.

.. O número de aplicações possíveis <u>somente</u> nos investimentos 1, 2 e 4 é:
dado pelo número de soluções inteiras, positivas da equação:

$$y_1 + y_2 + y_4 = 15, \quad \text{que é igual a } \binom{14}{2}$$

... O número de aplicações possíveis <u>somente</u> nos investimentos 1, 3 e 4 é:
dado pelo número de soluções inteiras, positivas da equação:

$$y_1 + y_3 + y_4 = 14, \quad \text{que é igual a } \binom{13}{2}.$$

.... O número de aplicações possíveis somente nos investimento 2, 3 e 4 é:
dado pelo número de soluções inteiras positivas da equação:

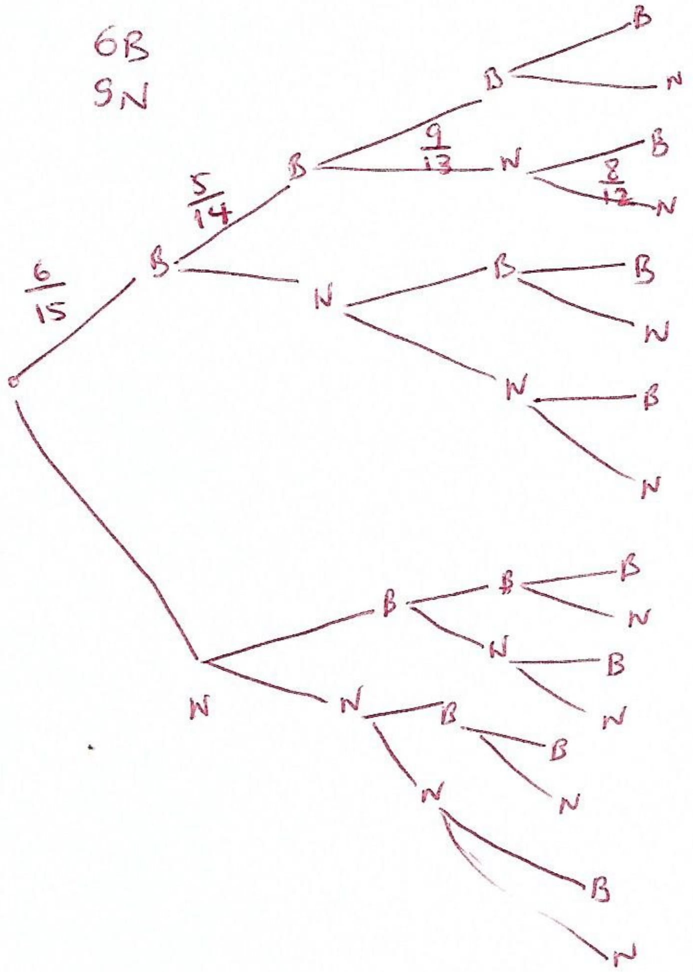
$$y_2 + y_3 + y_4 = 14, \quad \text{que é igual a } \binom{13}{2}$$

Logo, o número de aplicações que podem ser feitas em
aplicações em pelo menos 3 carteiras é:

$$\underbrace{\binom{15}{2} + \binom{14}{2} + \binom{13}{2} + \binom{13}{2}}_{\text{nº de aplicações possíveis em exatamente 3 carteiras}} + \underbrace{\binom{12}{3}} = 552 \text{ possibilidades.}$$

<u>Obs</u>: y_i é definido como no item (a).

03) 6B
9N



4 bolas escolhidas SEM REPOSIÇÃO

Desejamos saber a probabilidade de que as duas primeiras sejam brancas e as duas últimas negras?

$$P(BBNN) = \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} \times \frac{9}{13} \times \frac{8}{12} = \boxed{\frac{6}{91}}$$

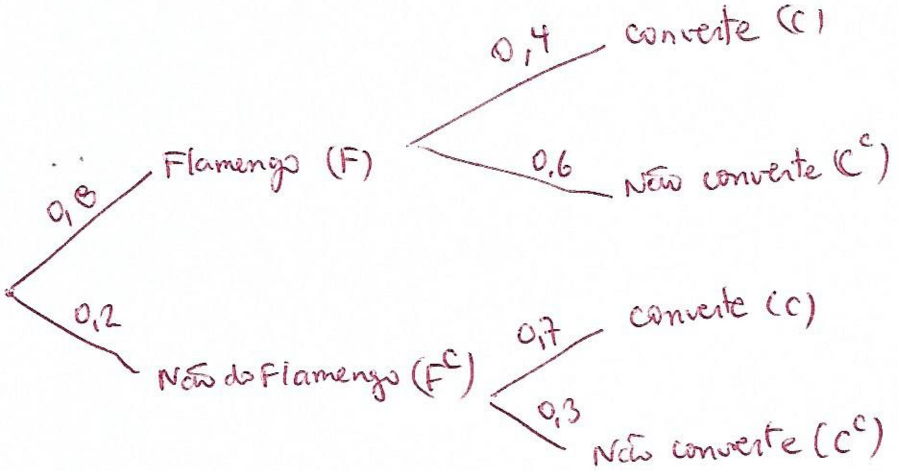
04)

Seja F = "cobrador é do Flamengo"
e C = "penalti é convertido"

Em (a) desejamos $P(F \cap C)$.

$\therefore P(F \cap C) = P(F) \cdot P(C|F) = 0{,}8 \times 0{,}4 = \boxed{0{,}32}$

b)



$\therefore P(C) = 0{,}8 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}7 = \boxed{0{,}46}$

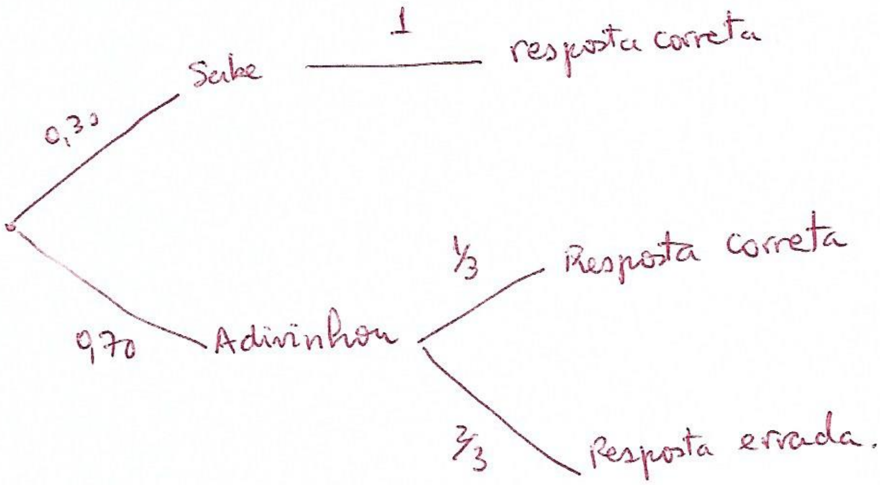
(c) $P(F|C^c)$ é a probabilidade que se deseja calcular.

$$\therefore P(F|C^c) = \frac{P(F \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{0{,}48}{0{,}54} \cong \boxed{0{,}88}.$$

$P(F \cap C^c) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$

$P(C^c) = 0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}54$

05)



Desejamos calcular:

P[adivinhou | resposta correta]. Pelo Teorema de Bayes:

P[adivinhou | resposta correta] =

$$= \frac{P[\text{adivinhou}] \cdot P[\text{resposta correta} \mid \text{adivinhou}]}{P[\text{adivinhou}] \cdot P[\text{resposta correta} \mid \text{adivinhou}] + P[\text{sabe}] \cdot P[\text{resposta correta} \mid \text{sabe}]}$$

$$= \frac{0{,}70 \times \frac{1}{3}}{0{,}70 \times \frac{1}{3} + 0{,}30 \times 1} = \boxed{\frac{7}{16}}$$