GABARITO:

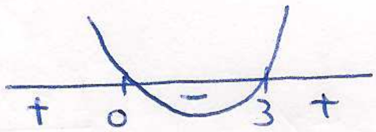
01) a) C.E. $x^2 - 3x \geq 0$ (I)

$\sqrt{x^2-3x} < 2 \iff \sqrt{x^2-3x} < \sqrt{4} \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$ (II)

Estudo de (I):

$x^2 - 3x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$.

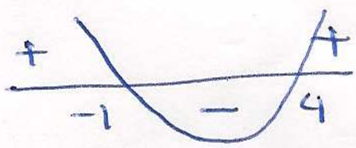
Sinal de $x^2 - 3x$:

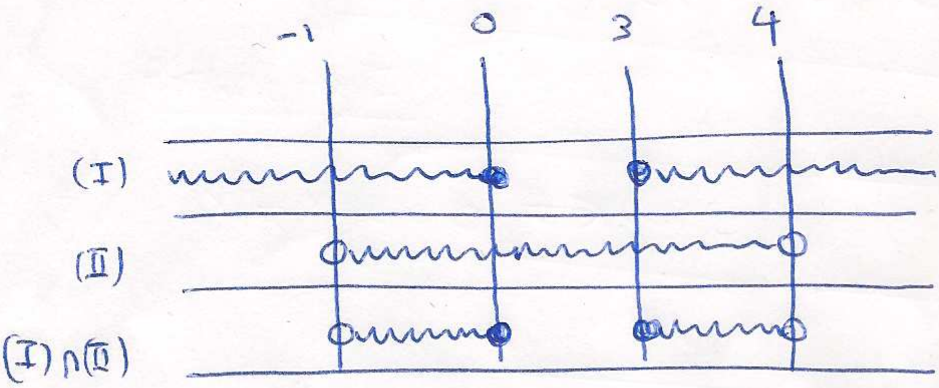


Estudo de (II): $x^2 - 3x - 4 < 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 4$.

Sinal de $x^2 - 3x - 4$.





$\therefore V =]-1, 0] \cup [3, 4[$.

01 (b) $|2x-6| - |x| \leq 4-x$

$\Updownarrow$

$|2x-6| - |x| - 4 + x \leq 0$

	$x \leq 0$	$0 \leq x \leq 3$	$x \geq 3$
$\|2x-6\|$	$-2x+6$	$-2x+6$	$2x-6$
$-\|x\|$	x	$-x$	$-x$
$-4+x$	$-4+x$	$-4+x$	$-4+x$
$\|2x-6\|-\|x\|-4+x$	2	$-2x+2$	$2x-10$

$$\therefore |2x-6| - |x| - 4 + x = \begin{cases} 2 & x \leq 0 \\ -2x+2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x-10 & x \geq 3. \end{cases}$$

∴ • Se $\underline{x \leq 0}$: $\underline{|2x-6| - |x| - 4 + x} \leq 0 \Rightarrow 2 \leq 0$. Absurdo

$\therefore V_1 = \emptyset$

•• $\underline{0 \leq x \leq 3}$.

$|2x-6| - |x| - 4 + x = -2x+2 \leq 0 \Leftrightarrow -2x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1$

$\therefore V_2 = [1, 3]$

••• $\underline{x \geq 3}$

$|2x-6| - |x| - 4 + x = 2x - 10 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 10 \Leftrightarrow \underline{x \leq 5}$.

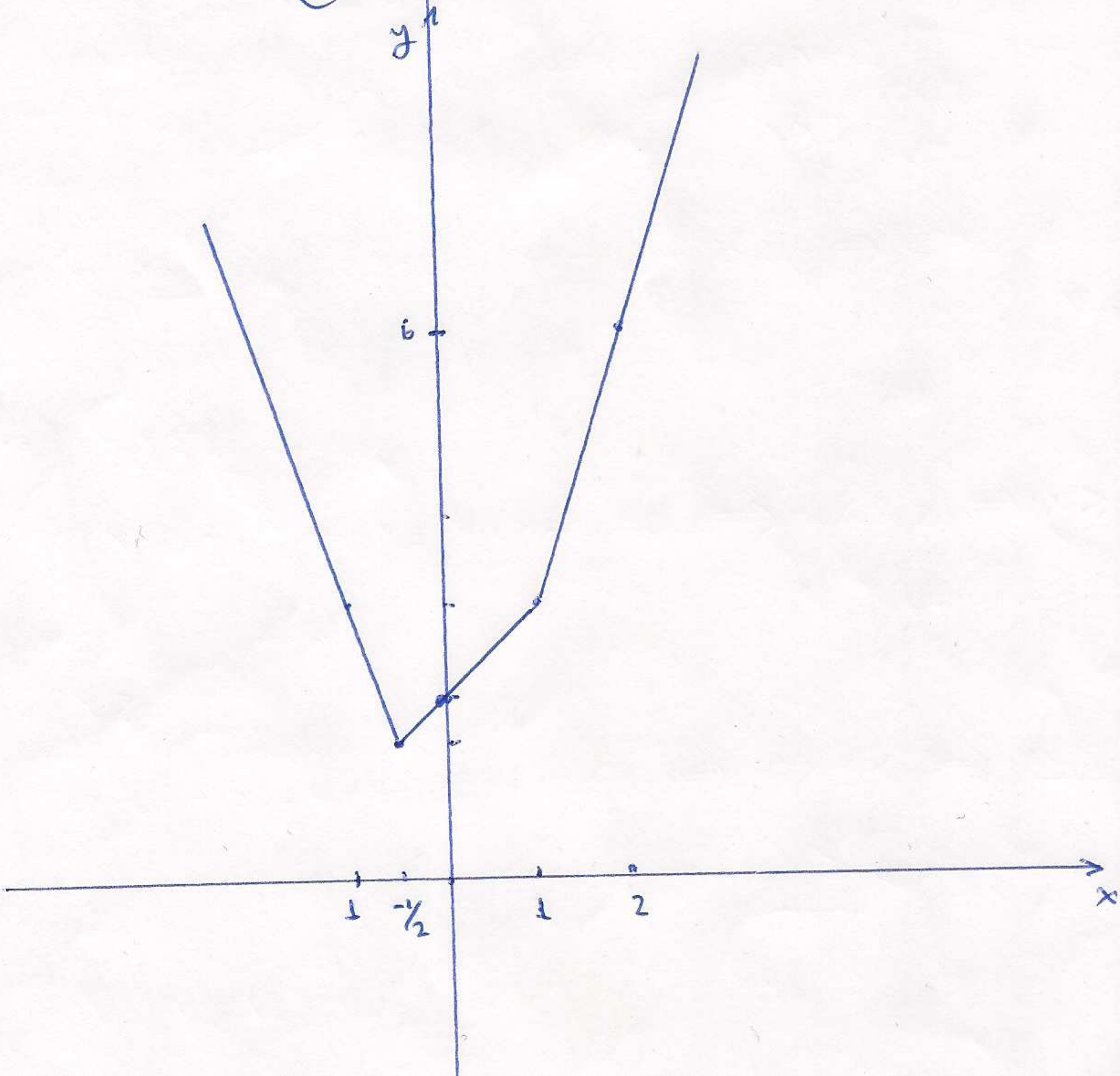
$\therefore V_3 = [3, 5]$

$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 = [1, 5]$.

02) $D_f = \mathbb{R}$.

	$x \leq -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$	$x \geq 1$
$\lvert 2x+1 \rvert$	$-2x-1$	$2x+1$	$2x+1$
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\lvert 2x+1 \rvert + \lvert x-1 \rvert$	$-3x$	$x+2$	$3x$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -3x & x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3x & x \geq 1. \end{cases}$$



(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$

I) f é injetora, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$.

(i) f é injetora, $\forall x \geq 0$.

Suponha $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$

Suponha que $x_1 \neq x_2$.

Então $x_1 - x_2 \neq 0$ e como $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

Temos: $x_1 + x_2 = 0$.

Logo $x_1 = -x_2$.

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, concluímos que $x_1 = x_2 = 0$.

Absurdo.

Logo $x_1 = x_2$.

(ii) f é injetora, $\forall x < 0$.

Suponha $f(x_1) = f(x_2)$, Então $x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

$x_1 < 0$ e $x_2 < 0$

(iii) f é injetora, $\forall x < 0$ e $\forall y \geq 0$. ~~tq f(x) = f(y)~~.

Mostraremos que para qualquer $x < 0$ e $y \geq 0$, $f(x) \neq f(y)$.

Suponha que $f(x) = f(y)$ para algum $x < 0$ e $y \geq 0$.

Daí $x - 1 = y^2 - 1 \Rightarrow x = y^2$. Mas $x < 0$ e $y^2 \geq 0$. Absurdo!

Logo $f(x) \neq f(y)$ e $\therefore$ f é injetora

B f é sobrejetora:

Temos dois casos a considerar:

Seja $y \in \mathbb{R}$, $\underline{y \geq -1}$. Nesse caso tome $x = \sqrt{y+1}$

Observe que neste caso $y+1 \geq 0$ e $\therefore$ $x = \sqrt{y+1} \geq 0$

Logo $f(x) = f(\sqrt{y+1}) = (\sqrt{y+1})^2 - 1 = y$.

Seja $y \in \mathbb{R}$, $y < -1$. Nesse caso tome $x = y+1$.

Observe que nesse caso, $\underbrace{y+1}_{x} < 0$

Logo $f(x) = f(y+1) = (y+1) - 1 = y$.

$\therefore$ f é sobrejetora.

$\therefore$ f é sobrejetora e injetora $\Longrightarrow$ f é bijetora.

(b) Pelo item (a) f é bijetora e portanto existe a função inversa f^{-1}.

$$\therefore \; f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq -1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

Solução 2: da questão 03 a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$

Dem: Mostraremos que f é estritamente crescente.

i.e. $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Observe que se f é estritamente crescente então f é injetora.

Suponha por contradição que para algum $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

com $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Temos três casos a serem considerados:

(i) x_1, x_2 ambos negativos:

Nesse caso, $f(x_1) = x_1 - 1 \geq x_2 - 1 = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \geq x_2$

Absurdo

(ii) x_1, x_2 ambos positivos:

Nesse caso, $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow x_1^2 \geq x_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \geq 0$

$\underset{x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0}{\Rightarrow} x_1 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq x_2$ (Absurdo)!

(iii) x_1 negativo e x_2 positivo:

Nesse caso, $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 \geq x_2^2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \geq x_2^2 \underset{x_1 < 0}{\Rightarrow} x_2^2 \leq x_1 < 0 \Rightarrow x_2^2 < 0$

Absurdo.

Logo em qualquer caso, f é estritamente crescente e portanto, f é injetora.

Seja $f: A \to B$ função:

04 a)

$f: A \to B$ é função <u>injetora</u>, se para quaisquer $x, y \in A$, vale que: se $f(x) = f(y)$ então $x = y$.

$f: A \to B$ é função <u>sobrejetora</u>, se o conjunto imagem de f é igual ao contradomínio de f.

$f: A \to B$ é função <u>bijetora</u> se f for <u>injetora</u> e <u>sobrejetora</u>, simultaneamente.

b) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = x - |y|$

Observe que $f(1, 1) = f(1, -1) = 0$.

Logo f não é injetora e portanto, f não é bijetora.

- <u>f é sobrejetora</u>.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Tome $(a, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $f(a, 0) = a - |0| = a$.

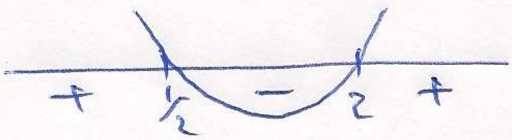
$\therefore$ f é <u>sobrejetora</u>.

05) $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > 1$

<u>C.E:</u> $0 < x \neq 1.$; $2x^2 - 5x + 2 > 0$ (I)

$2x^2 - 5x + 2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2.$

<u>Sinal de $2x^2 - 5x + 2$:</u>



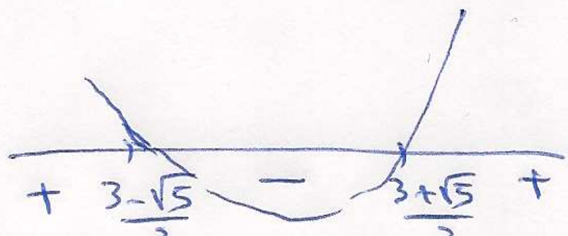
<u>Caso 1)</u> <u>$x > 1$</u> (II)

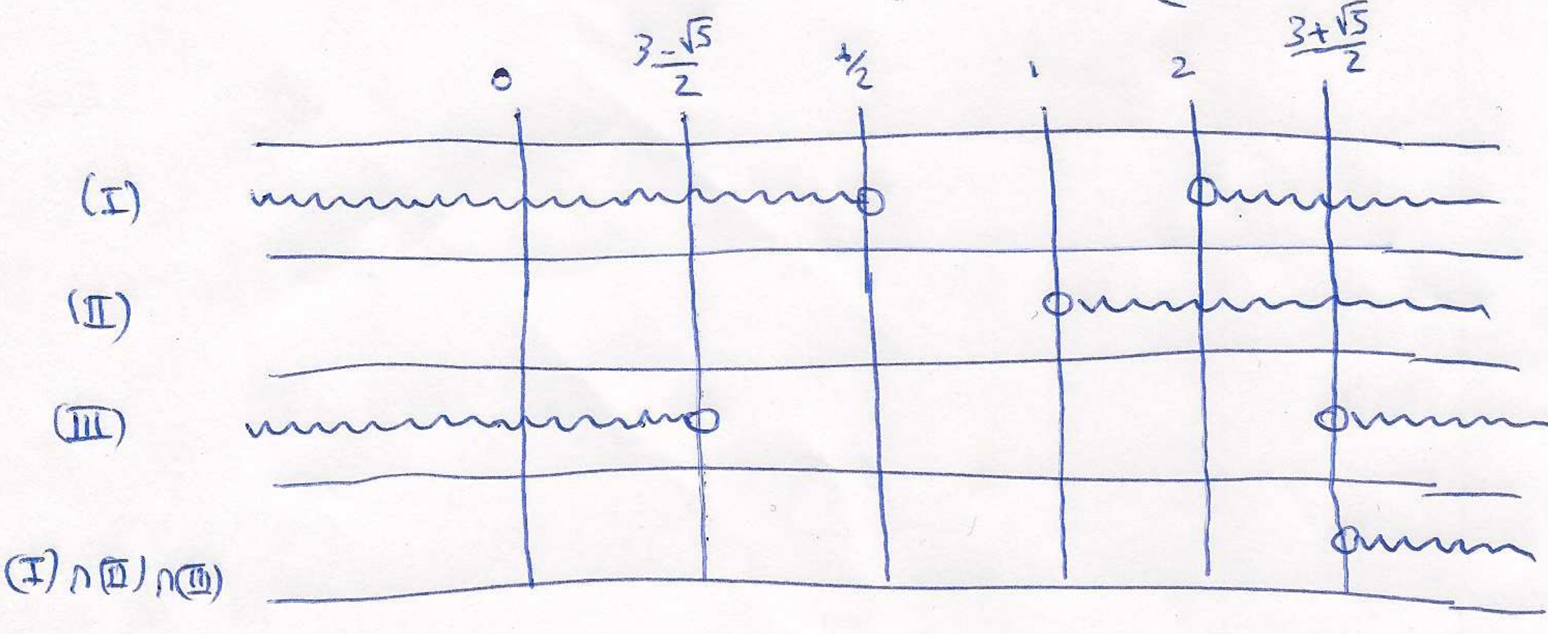
Nesse caso: $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > \log_x x \iff 2x^2 - 5x + 2 > x$

$\iff 2x^2 - 6x + 2 > 0$ (III)

$2x^2 - 6x + 2 = 0 \iff x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$

<u>Sinal de $2x^2 - 6x + 2$:</u>



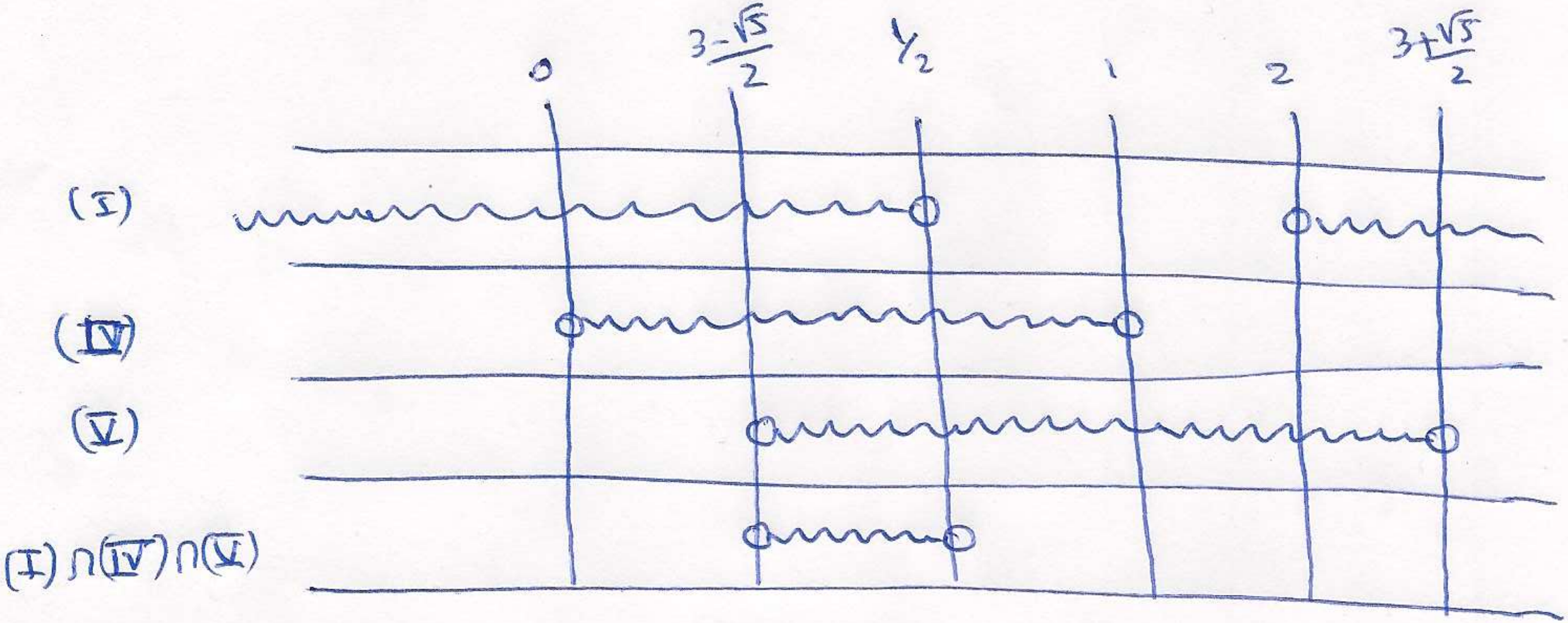


$V_1 = \left]\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right[.$

Caso 2): $0 < x < 1$ (IV)

Nesse caso: $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > \log_x x \iff 2x^2 - 5x + 2 < x$

$\iff 2x^2 - 6x + 2 < 0$. (V)



$V_2 = \left] \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right[$

$\therefore V = V_1 \cup V_2 = \left] \frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[\cup \left] \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right[$.