01) a)

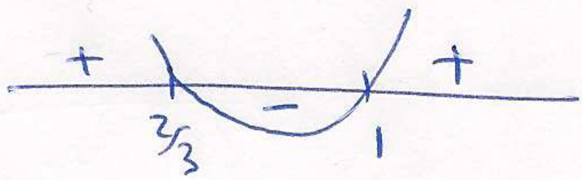
C.E.: $3x^2 - 5x + 2 \geq 0$ (I)

$$\sqrt{3x^2-5x+2} \leq 2 \iff \sqrt{3x^2-5x+2} \leq \sqrt{4} \iff$$

$$\iff 3x^2-5x+2-4 \leq 0 \iff 3x^2-5x-2 \leq 0 \quad \text{(II)}$$

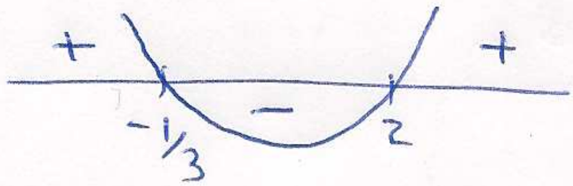
Estudo de (I): $3x^2-5x+2=0 \iff x=\frac{2}{3}$ ou $x=1$

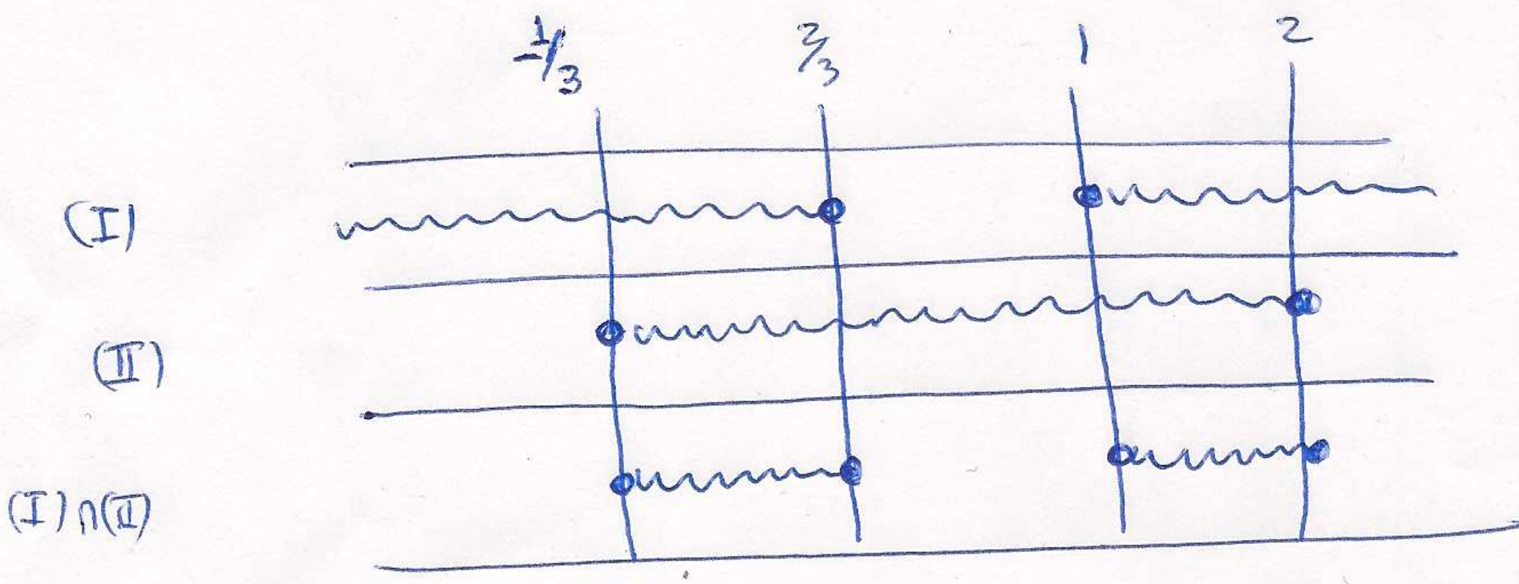
Estudo do sinal de $3x^2-5x+2$:




Estudo de (II): $3x^2-5x-2=0 \iff x=-\frac{1}{3}$, ou $x=2$.

Sinal de (II):




$$V = \left[-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right] \cup [1, 2].$$

01 (b) $|2x-6| - |x| \leq 4-x$

$$\Updownarrow$$

$|2x-6| - |x| - 4 + x \leq 0$

| | $x \leq 0$ | $0 \leq x \leq 3$ | $x \geq 3$ |
|---|---|---|---|
| $\|2x-6\|$ | $-2x+6$ | $-2x+6$ | $2x-6$ |
| $-\|x\|$ | $x$ | $-x$ | $-x$ |
| $-4+x$ | $-4+x$ | $-4+x$ | $-4+x$ |
| $\|2x-6\|-\|x\|-4+x$ | $2$ | $-2x+2$ | $2x-10$ |

$\therefore |2x-6| - |x| - 4 + x = \begin{cases} 2 & x \leq 0 \\ -2x+2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x-10 & x \geq 3. \end{cases}$

$\therefore$ Se $\underline{x \leq 0}$ : $\underline{|2x-6| - |x| - 4 + x} \leq 0 \Rightarrow 2 \leq 0$. Absurdo

$\therefore V_1 = \emptyset$

$\underline{0 \leq x \leq 3}$.

$|2x-6| - |x| - 4 + x = -2x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1$

$\therefore V_2 = [1, 3]$

$\underline{x \geq 3}$

$|2x-6| - |x| - 4 + x = 2x - 10 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 10 \Leftrightarrow \underline{x \leq 5}$.

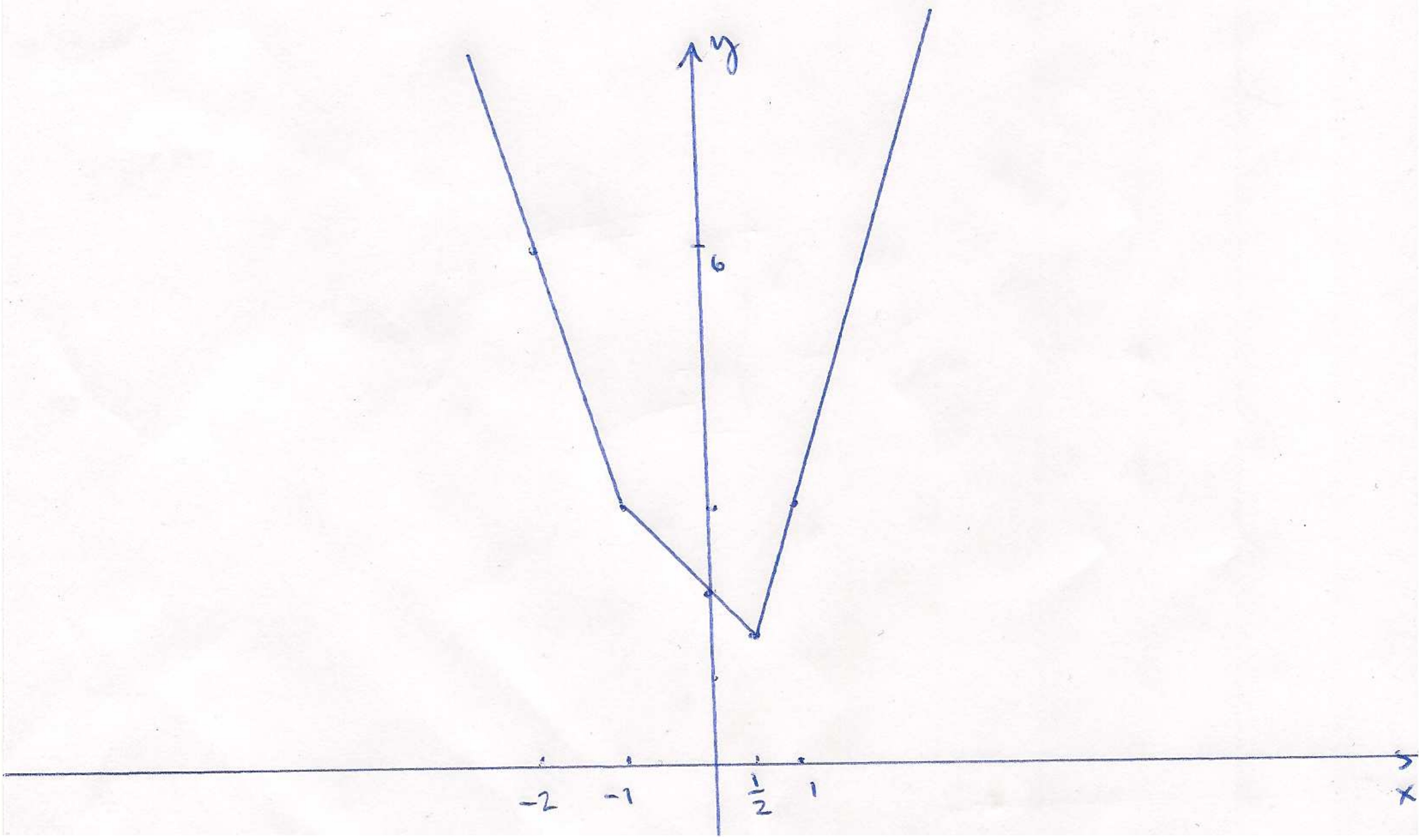
$\therefore V_3 = [3, 5]$

$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 = [1, 5]$.

02) $D_f = \mathbb{R}$.

| | $x \le -1$ | $-1 \le x \le \frac{1}{2}$ | $x \ge \frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert 2x-1\rvert$ | $-2x+1$ | $-2x+1$ | $2x-1$ |
| $\lvert x+1\rvert$ | $-x-1$ | $x+1$ | $x+1$ |
| $\lvert 2x-1\rvert+\lvert x+1\rvert$ | $-3x$ | $-x+2$ | $3x$ |

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -3x & x \le -1 \\ -x+2 & -1 \le x \le \frac{1}{2} \\ 3x & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



03) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \geq 0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$

I) $f$ é injetora, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$.

(i) $f$ é injetora, $\forall x \geq 0$.

Suponha $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$.

Suponha que $x_1 \neq x_2$.

Então $x_1 - x_2 \neq 0$ e como $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

Temos: $x_1 + x_2 = 0$.

Logo $x_1 = -x_2$.

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, concluímos que $x_1 = x_2 = 0$.

Absurdo.

Logo $x_1 = x_2$.

(ii) $f$ é injetora, $\forall x<0$.

Suponha $f(x_1) = f(x_2)$, Então $x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

$x_1 < 0$ e $x_2 < 0$

(iii) $f$ é injetora, $\forall x<0$ e $\forall y \geq 0$. ~~tq f(x) = f(y)~~.

Mostraremos que para qualquer $x<0$ e $y \geq 0$, $f(x) \neq f(y)$.

Suponha que $f(x) = f(y)$ para algum $x<0$ e $y \geq 0$.

Daí $x - 1 = y^2 - 1 \Rightarrow x = y^2$. Mas $x<0$ e $y^2 \geq 0$. Absurdo!

Logo $f(x) \neq f(y)$ e $\therefore$ $f$ é injetora

**$f$ é sobrejetora:**

Temos dois casos a considerar:

Seja $y \in \mathbb{R}$, $\underline{y \geq -1}$. Nesse caso tome $x = \sqrt{y+1}$

Observe que neste caso $y+1 \geq 0$ e $\therefore$ $x = \sqrt{y+1} \geq 0$

Logo $f(x) = f(\sqrt{y+1}) = (\sqrt{y+1})^2 - 1 = y$.

Seja $y \in \mathbb{R}$, $y < -1$. Nesse caso tome $x = y+1$.

Observe que nesse caso, $\underbrace{y+1}_{=x} < 0$

Logo $f(x) = f(y+1) = (y+1) - 1 = y$.

$\therefore$ $f$ é sobrejetora.

$\therefore$ $f$ é sobrejetora e injetora $\Longrightarrow$ $f$ é bijetora.

(b) Pelo item (a) $f$ é bijetora e portanto existe a função inversa $f^{-1}$.

$$\therefore\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq -1 \\ x+1 & x < -1. \end{cases}$$

Solução 2:
da questão 03 a)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$

Dem: Mostraremos que $f$ é estritamente crescente.

i.e. $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Observe que se $f$ é estritamente crescente então $f$ é injetora.

Suponha por contradição que para algum $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Temos três casos a serem considerados:

(i) $x_1, x_2$ ambos negativos:

Nesse caso, $f(x_1) = x_1 - 1 \geq x_2 - 1 = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \geq x_2$

Absurdo

(ii) $x_1, x_2$ ambos positivos:

Nesse caso, $f(x_1) \geq f(x_2) \Longrightarrow x_1^2 \geq x_2^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \Longrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \geq 0$

$\underset{x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0}{\Longrightarrow} x_1 - x_2 \geq 0 \Longrightarrow x_1 \geq x_2$ (Absurdo)!

(iii) $x_1$ negativo e $x_2$ positivo:

Nesse caso, $f(x_1) \geq f(x_2) \Longrightarrow x_1 - 1 \geq x_2^2 - 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1 \geq x_2^2 \underset{x_1 < 0}{\Longrightarrow} x_2^2 \leq x_1 < 0 \Longrightarrow x_2^2 < 0$

Absurdo.

Logo em qualquer caso, $f$ é estritamente crescente e portanto, $f$ é injetora.

04) a) Seja $f: A \to B$ função:

$f: A \to B$ é função <u>injetora</u>, se para quaisquer $x, y \in A$, vale que: se $f(x) = f(y)$ então $x = y$.

$f: A \to B$ é função <u>sobrejetora</u>, se o conjunto imagem de $f$ é igual ao contradomínio de $f$.

$f: A \to B$ é função <u>bijetora</u> se $f$ for <u>injetora</u> e <u>sobrejetora</u>, simultaneamente.

b) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = x + |y|$

Observe que $f(1,1) = f(1,-1) = 2$

Logo $f$ não é injetora e portanto, $f$ não é bijetora.

- <u>$f$ é sobrejetora</u>:

Seja $a \in \mathbb{R}$. Tome $(a, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. e $f(a, 0) = a + |0| = a$.

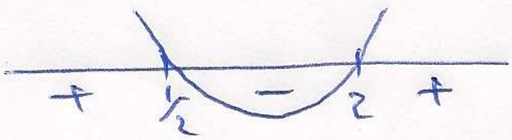
$\therefore$ $f$ é sobrejetora.

05) $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > 1$

C.E.: $0 < x \neq 1$ ; $2x^2 - 5x + 2 > 0$ (I)

$2x^2 - 5x + 2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$.

Sinal de $2x^2 - 5x + 2$:



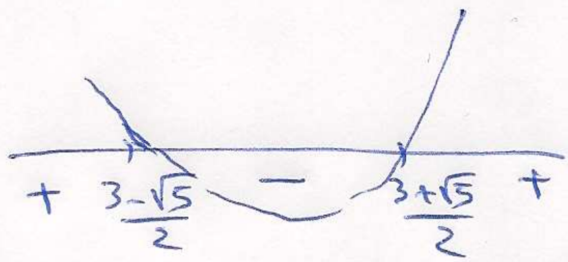

Caso 1) $x > 1$ (II)

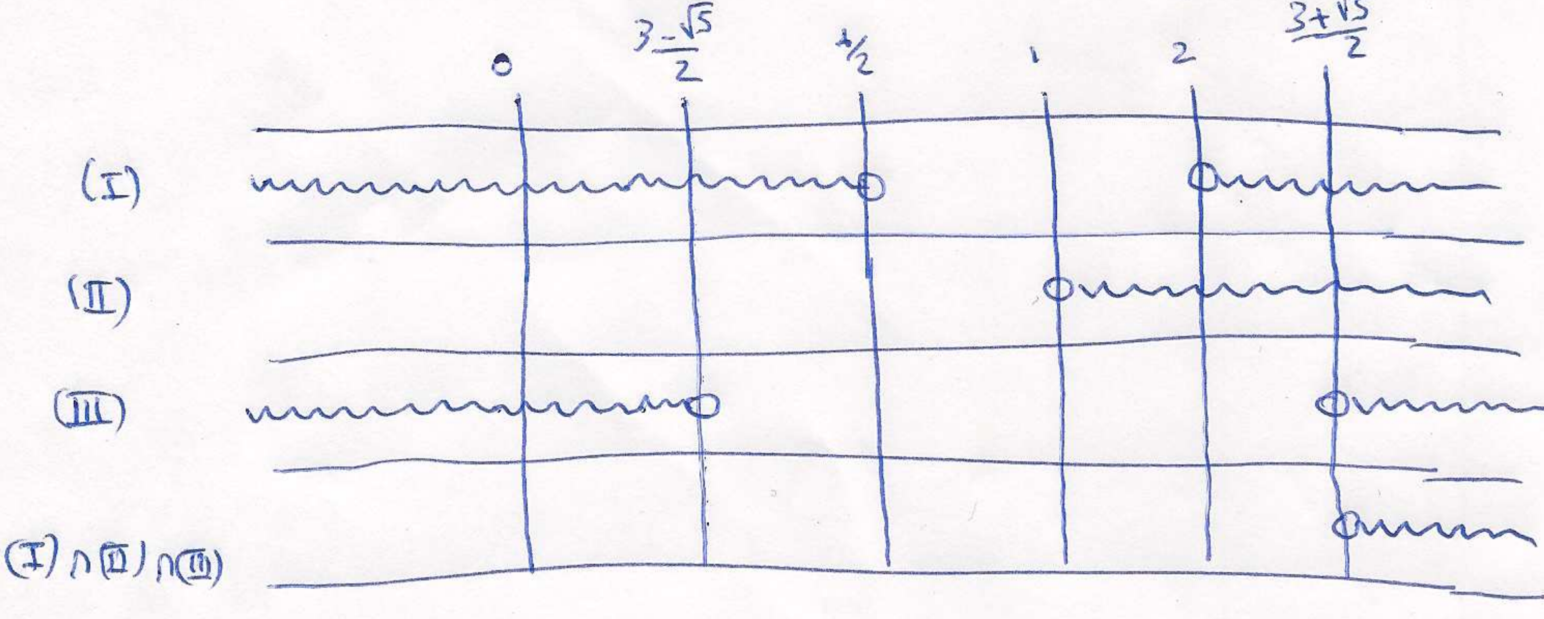
Nesse caso: $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > \log_x x \iff 2x^2 - 5x + 2 > x$

$\iff 2x^2 - 6x + 2 > 0$ (III)

$2x^2 - 6x + 2 = 0 \iff x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Sinal de $2x^2 - 6x + 2$:



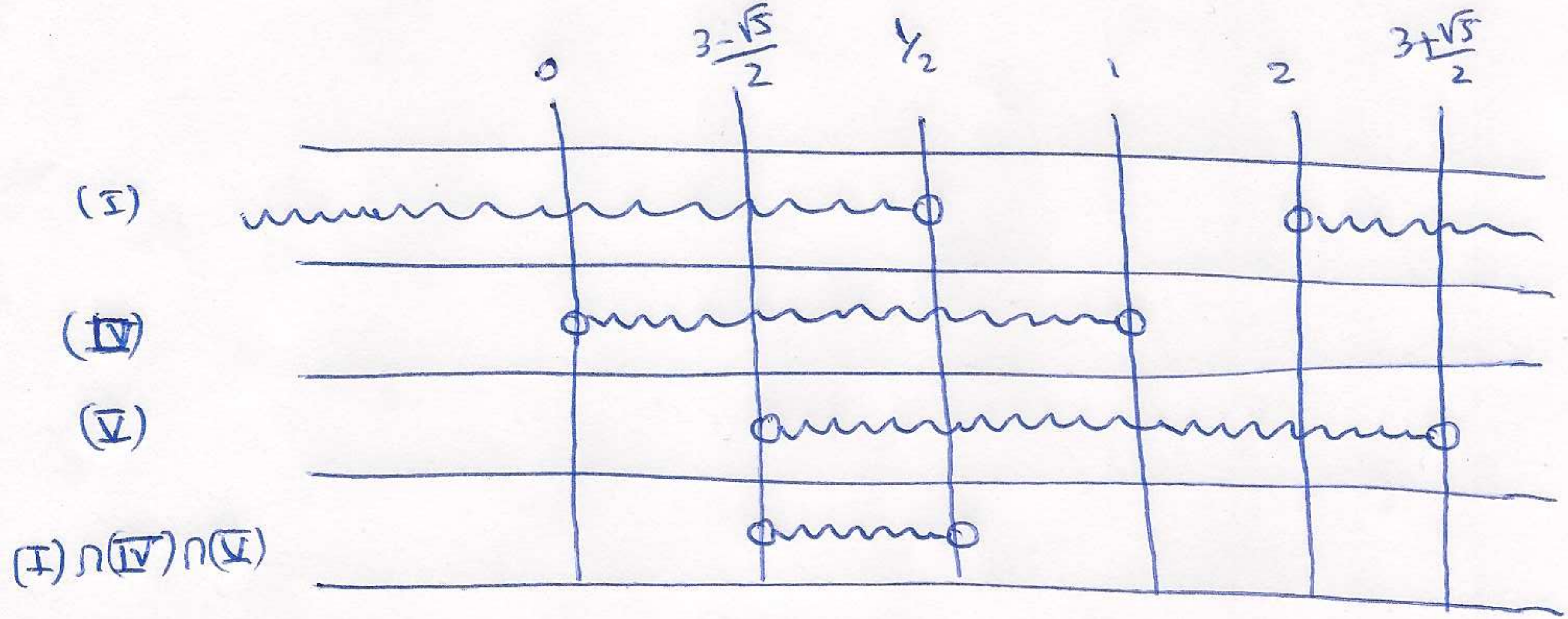




$V_1 = \left] \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$.

Caso 2): $0 < x < 1$ (IV)

Nesse caso: $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > \log_x x \iff 2x^2 - 5x + 2 < x$

$\iff 2x^2 - 6x + 2 < 0$. (V)




$V_2 = \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right[$

$\therefore V = V_1 \cup V_2 = \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[ \cup \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right[$.