

GABARITO:

01) a) C.E. $x^2 - 3x \geq 0$ (I)

$$\sqrt{x^2 - 3x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x} < \sqrt{4} \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \quad (\text{II})$$

Estudo de (I):

$$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

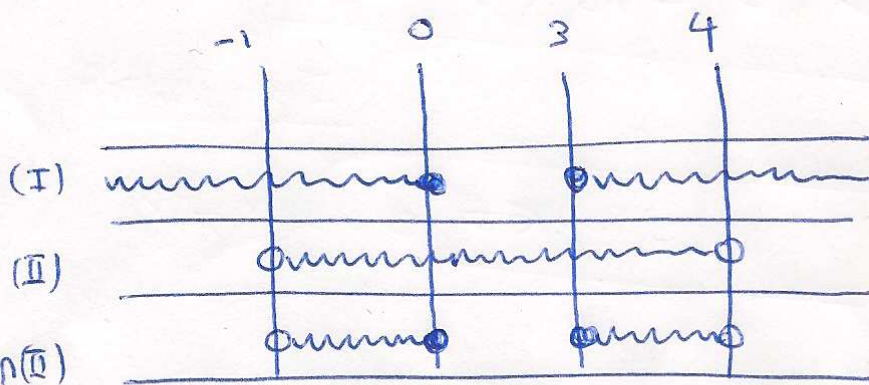
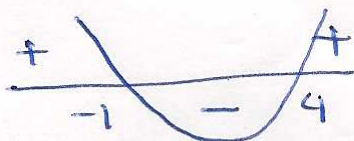
Sinal de $x^2 - 3x$:



Estudo de (II): $x^2 - 3x - 4 < 0$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4.$$

Sinal de $x^2 - 3x - 4$.



$$\therefore V =]-1, 0] \cup [3, 4[.$$

01 b)

$$|2x-6| - |x| \leq 4-x$$



$$|2x-6| - |x| - 4 + x \leq 0$$

	0	3	
$ 2x-6 $	$-2x+6$	$-2x+6$	$2x-6$
$- x $	x	$-x$	$-x$
$-4+x$	$-4+x$	$-4+x$	$-4+x$
$ 2x-6 - x - 4 + x$	2	$-2x+2$	$2x-10$

$$\therefore |2x-6| - |x| - 4 + x = \begin{cases} 2 & x \leq 0 \\ -2x+2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x-10 & x > 3. \end{cases}$$

\therefore Se $x \leq 0$ $\therefore |2x-6| - |x| - 4 + x \leq 0 \Rightarrow 2 \leq 0$. Absurdo
 $\therefore V_1 = \emptyset$

\therefore $0 \leq x \leq 3$

$$|2x-6| - |x| - 4 + x = -2x+2 \leq 0 \Leftrightarrow -2x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$\therefore V_2 = [1, 3]$

\dots $x > 3$

$$|2x-6| - |x| - 4 + x = 2x-10 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq 5.$$

$\therefore V_3 = [3, 5]$

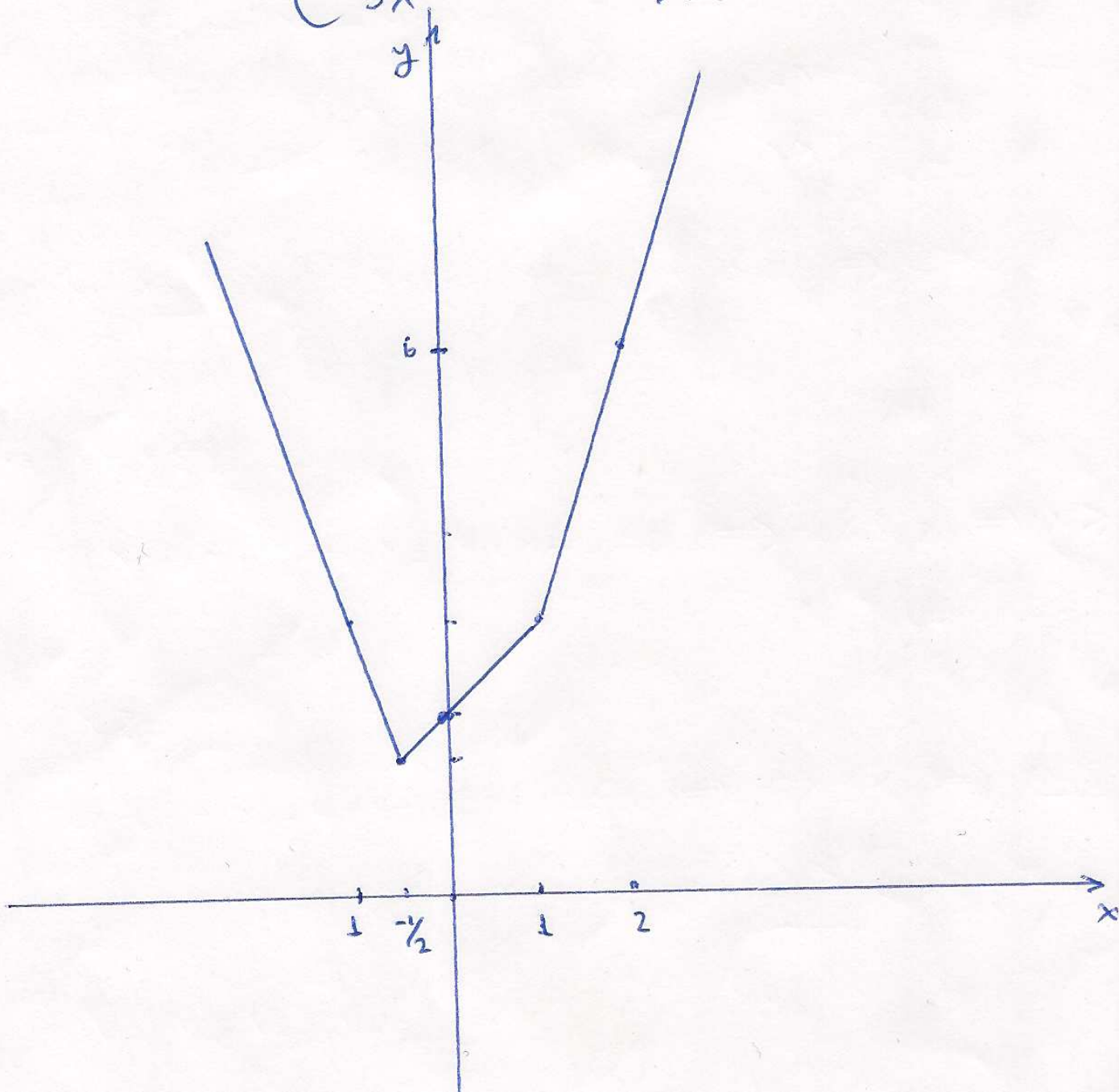
$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 = [1, 5].$$

02)

$$D_f = \mathbb{R}$$

	$-\frac{1}{2}$		1
$ 2x+1 $	$-2x-1$	$2x+1$	$2x+1$
$ x-1 $	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$ 2x+1 + x-1 $	$-3x$	$x+2$	$3x$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -3x & x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3x & x \geq 1 \end{cases}$$



$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$$

Devemos mostrar que f é injetora e sobrejetora.

• f é sobrejetora

Seja $y \in \mathbb{R}$. Tome $x = \sqrt[3]{y}$ e $f(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

$\therefore f$ é sobrejetora.

• f é injetora.

Devemos mostrar que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,
se $f(x) = f(y)$ então $x = y$.

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0$$

$$\therefore (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \quad (I)$$

Mostraremos que $x = y$. De (I) temos que:

• Se $(x-y) = 0$ então $x = y$ e f é injetora.

• Se $x^2 + xy + y^2 = 0$ então

$$\text{como } x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = \underbrace{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}_{\geq 0}$$

$$\text{temos que } \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ e } x = 0$$

Logo em qualquer caso, $x = y$ e f é injetora

$\therefore f$ é bijetora!

b) Pelo item (c) f é bijetora
e portanto existe a função inversa f^{-1} .

$y = x^3 \Rightarrow$ Para obter a expressão de inversa;

$$x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore y = \sqrt[3]{x}$$

\therefore $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ é a função inversa de f .

04 a)

Seja $f: A \rightarrow B$ função:

$f: A \rightarrow B$ é função injetora, se para quaisquer $x, y \in A$, vale que: se $f(x) = f(y)$ então $x = y$.

$f: A \rightarrow B$ é função sobrejetora, se o conjunto imagem de f é igual ao contradomínio de f .

$f: A \rightarrow B$ é função bijetora se f for injetora e sobrejetora simultaneamente.

b) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x - |y|$$

Observe que $f(1, 1) = f(1, -1) = 0$.

Logo f não é injetora e portanto, f não é bijetora.

• f é sobrejetora.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Tome $(a, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $f(a, 0) = a - |0| = a$.

$\therefore f$ é sobrejetora.

$$05) \log_x (2x^2 - 5x + 2) > 1$$

C.E.: $0 < x \neq 1$; $2x^2 - 5x + 2 > 0$ (I)

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2.$$

Signes de $2x^2 - 5x + 2$:

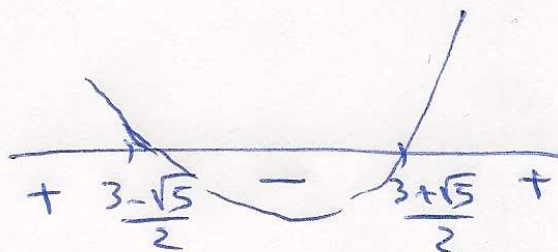


Caso 1) $x > 1$ (II)

Nesse caso: $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > \log_x x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 > x$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 2 > 0$ (III)

$$2x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Signes de $2x^2 - 6x + 2$:



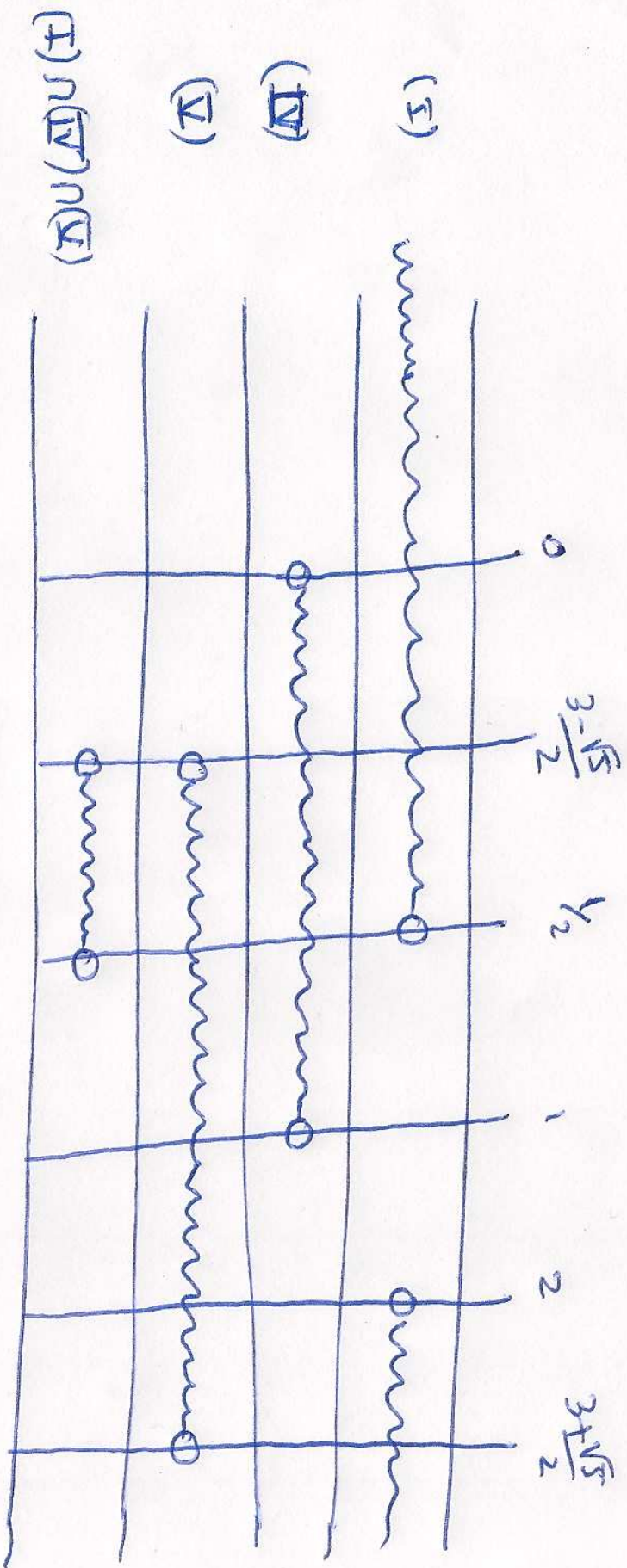
	0	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
(I)		~	~		~	~
(II)				~	~	~
(III)	~	~				~
(I) ∩ (II) ∩ (III)						~

$$V_1 =] \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty [$$

Case 2): $0 < x < 1$ (IV)

None case = $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > \log_x x \iff 2x^2 - 5x + 2 < x$

$\iff 2x^2 - 6x + 2 < 0$, (V)



$V_2 =] \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} [$

$\therefore V = V_1 \cup V_2 =] \frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty [\cup] \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} [$