P2 - FVV - Prof. Edson Iwaki - 23/04/2015

Nome:

1. (**2.0**) Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração da integral $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) \quad dydx$.

2. (**2.0**) Encontre o máximo e mínimo global da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, na região triangular de vértices $(0,0),(0,1),(1,0)$.

3. (**3.0**) Calcule $\displaystyle\int\int_R \frac{x^2}{y^2} \quad dxdy$, onde R é a região delimitada por $y = x, y = \frac{1}{x}$ e $x = 2$.

4. (**3.0**) Calcule $\displaystyle\int\int_B (x^2 + 2y) \quad dxdy$, onde B é o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

5. (**1.5**) Calcule $\displaystyle\int\int_B x \quad dxdy$, onde B é a região compreendida entre os gráficos de $y = cos(x)$ e $y = 1 - cos(x)$, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

6. (EXTRA) (**3.0**) Calcule $\displaystyle\int\int_B \sqrt[3]{y^2 - x^2} \quad dxdy$, onde B é o paralelogramo de vértices $(0,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(0,1),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

GABARITO:

9).

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\, dy\, dx.$$

- Determinação da região de Integração: B:

Para cada x fixado, $x \in [0,1]$,
y varia de $\sqrt{x-x^2}$ a $\sqrt{2x}$.

$\therefore \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \ \sqrt{x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x}\}$.

• $y = \sqrt{x-x^2}$

$y^2 = x - x^2 \iff x^2 - x + y^2 = 0 \iff x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Circunferência de centro $C(1/2, 0)$ e raio $r = 1/2$.

•• $y = \sqrt{2x}$

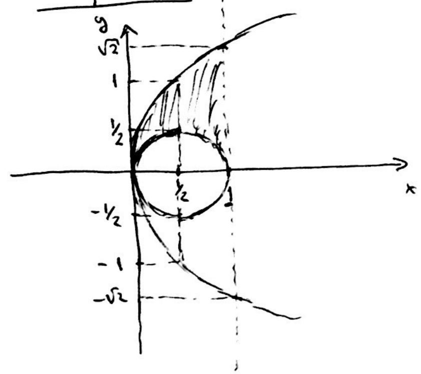
$y^2 = 2x$

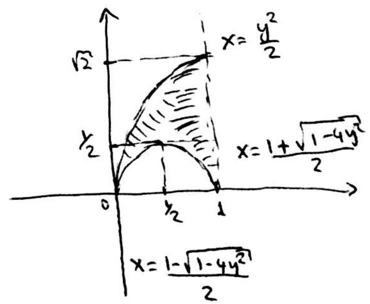
••• Expressando x em função de y, obtemos:

$x^2 - x + y^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2}$

$y^2 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{2}$.

• Esboço de B:





$\therefore \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx = \iint_{B_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{B_2} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{B_3} f(x,y)\,dx\,dy$

, onde $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \frac{1}{2},\ \frac{y^2}{2} \le x \le \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}\}$

$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2} \le x \le 1\}$

$B_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le y \le \sqrt{2},\ \frac{y^2}{2} \le x \le 1\}$.

$\therefore \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx =$

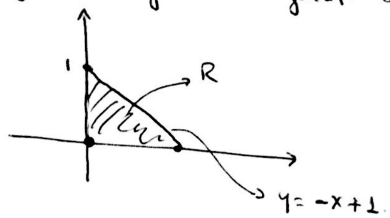
$$= \int_0^{1/2}\left[\int_{y^2/2}^{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x,y)\,dx\right]dy + \int_0^{1/2}\left[\int_{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{1} f(x,y)\,dx\right]dy +$$

$$+ \int_{1/2}^{\sqrt{2}}\left[\int_{y^2/2}^{1} f(x,y)\,dx\right]dy.$$

2) Encontre o máximo e mínimo global da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na região triangular de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

<u>Dem:</u> Seja R a região triangular do enunciado.

i.e.



· Pontos críticos no <u>Interior</u> de R:

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \quad x^4 = x \Rightarrow$$
$$f_y = 3y^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(\underbrace{x^2 + x + 1}_{\Delta < 0}) = 0 \Rightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

não possui raízes reais.

Candidatos a ponto crítico:

$(0,0)$; $(1,1)$, $(1,-1)$

Nenhum destes pontos pertence ao <u>interior</u> de R.

∴ Não existem pontos críticos no interior de R.

- $f(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e R é compacto (fechado e limitado) logo f admite máximo e mínimo sobre R.

<u>Lado 1</u>: $\{(0,y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$.

Def. $g_1(y) = f(0,y) = y^3$

$g_1'(y) = 3y^2$ $\qquad$ $g_1'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ e $g_1(0) = 0$.

Temos de verificar o valor de g_1 nos extremos do intervalo

$g_1(1) = 1$.

- **Lado 2:** $\{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

Def: $g_2(x) = f(x,0) = x^3$

$g_2'(x) = 3x^2 \qquad g_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

e $g_2(0) = 0$.

Além disso, $g_2(1) = 1$ (Temos de calcular o valor de g_2 nos extremos do intervalo!)

- **Lado 3:** $\{(x, -x+1) \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

Def. $g_3(x) = f(x, -x+1) = 6x^2 - 6x + 1$.

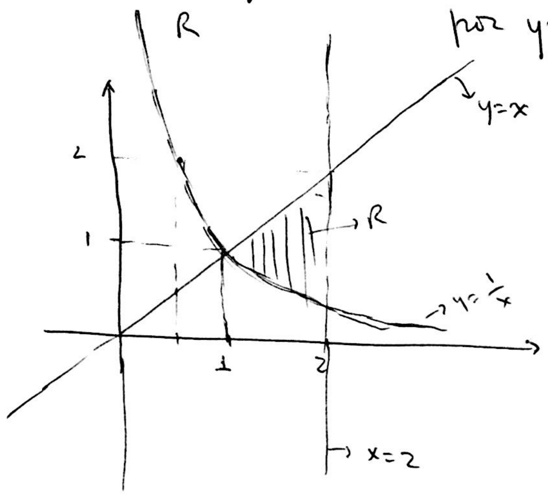
$g_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

e $g_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Além disso, $g_3(0) = 1$, $g_3(1) = 1$.

Segue daí que f admite máximo global em $(0,1)$ e $(1,0)$ e admite valor mínimo $\left(= -\frac{1}{2}\right)$ em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

03) $\iint_R \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $y=x$, $y=\frac{1}{x}$ e $x=2$.



$$\iint_R \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy \right] dx = \ldots$$

$$= \int_1^2 \left[x^2\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{1/x}^{x} \right] dx = \int_1^2 -x + x^3\,dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{9}{4}.$$

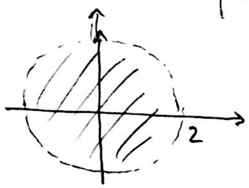
04) $\iint_B (x^2+2y)\,dx\,dy$, B é o círculo $x^2+y^2 \leq 4$.

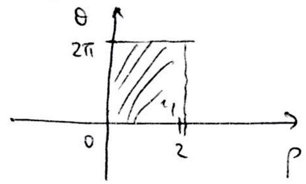
<u>Mudança de variável:</u>

$$\text{(I)} \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \longrightarrow dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta$$

$$\therefore\ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta.$$

- Determinar $B_{\rho\theta}$ tal que $\varphi(B_{\rho\theta}) = B$, onde φ é a transformação (I)





$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$

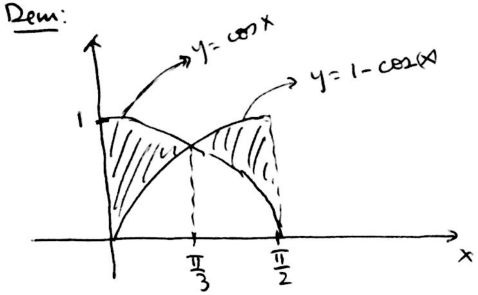
$B_{\rho\theta} = \{(\rho,\theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\therefore\ \iint_B (x^2+2y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 (\rho^2\cos^2\theta + 2\rho\,\text{sen}\,\theta)\,\rho\,d\rho\right] d\theta =$$

$$= \cdots = 4\pi.$$

05) $\displaystyle\iint_B x\,dx\,dy$, B é a região compreendida entre os gráficos de $y=\cos(x)$ e $y=1-\cos(x)$, $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$.

Dem:



$$0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1-\cos(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$2\cos x = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos x = \frac{1}{2} \iff x=\frac{\pi}{3}.$$

$$\iint_B x\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\int_{1-\cos x}^{\cos x} x\,dy\right]dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{\cos x}^{1-\cos x} x\,dy\right]dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(2x\cos(x) - x)\,dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2}(x-2x\cos x)\,dx =$$

$\left(\# \displaystyle\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x \quad \# \right.$ Recorde que: $\left.\right)$

$$= \left[2x\operatorname{sen}x + 2\cos x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/3} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\operatorname{sen}x - 2\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi}{3}(2\sqrt{3}-3).$$

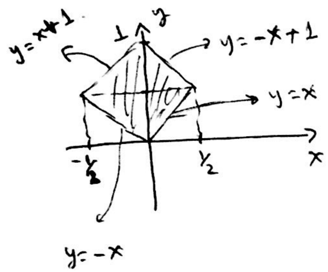
06) $\iint_B \sqrt[3]{y^2-x^2}\, dx\, dy$,

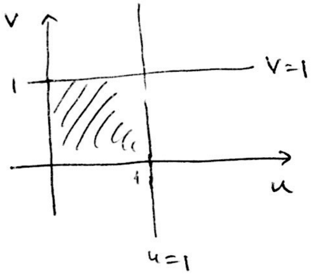
B é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(0,1)$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

<u>Dem:</u> $y^2-x^2 = (y-x)(y+x)$.

Mudança de variável:

$$\begin{cases} u = y-x \\ v = y+x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \\ y = \frac{v}{2} + \frac{u}{2} \end{cases}$$





$$-\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \Rightarrow dx\,dy = \frac{1}{2}\, du\,dv.$$

Seja Ψ a transformação dada por $\begin{cases} u = y-x \\ v = y+x. \end{cases}$,

$\Psi(x,y) = (u,v)$

- Ψ é a inversa da transformação $\varphi(u,v) = (x,y)$, def. por $\begin{cases} x = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \\ y = \frac{v}{2} + \frac{u}{2} \end{cases}$, observe que φ é de classe C^1.

– ψ leva as retas $y=x$, $y=-x+1$, $y=x+1$ e $y=-x$, respectivamente, nas retas $u=0$, $v=1$, $u=1$ e $v=0$.

Segue:

$$\iint_B \sqrt[3]{y^2-x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\frac{v}{2}+\frac{u}{2}\right)^2 - \left(\frac{v}{2}-\frac{u}{2}\right)^2}\ \frac{1}{2}\,du \right] dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^1 \sqrt[3]{uv}\ du \right] dv = \cdots = \frac{9}{32}$$