Álgebra Linear - 2019.1

Lista 4 - Produto interno

1) Mostre que $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

2) Dado $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Determine se $\langle x, y\rangle$ é um produto interno ou não. E se não for que axiomas falham.
(a) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$ (b) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$
(c) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\,|y_i|$ (d) $\langle x, y\rangle = |\sum_{i=1}^n x_iy_i|$

3) Em $\mathbb{R}^4$ determine se $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ é um produto interno.

4) Em $\mathbb{R}^2$ determine se $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ é um produto interno

5) Mostre que as seguintes funções bilineares são produtos internos definidos no epaço vetorial V:

(a) V é o espaço das funções contínuas reais no intervalo $[-1, 1]$,
$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^1 f_1(x)f_2(x)dx$, para $f_1, f_2 \in V$

(b) $V = M(2, 2)$, $\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, para $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ em V .

6) Dado um espaço vetorial V com produto interno $\langle\ ,\rangle$, mostre a desigualdade de Schwartz $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$ para qualquer $u, v \in V$. Usando a desigualdade de Schwartz, mostre a desigualdade triangular $\|u + w\| \leq \|u\| + \|v\|$.

7) Sejam os vetores de $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 1, 1), v_1 = (1, -1, 3), v_2 = (0, 2, 2)$ e $v_3 = (1, 2, 3)$. Considere o produto escalar como produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(a) Descubra qual dos vetores v_i tem o menor ângulo em relação a u.

(b) Descubra qual dos vetores v_i tem a menor distância em relação a u.

8) Sejam as matrizes (vetores) de $M(2, 2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
Considere o produto interno do exe.(5b).

(a) Descubra qual dos vetores B ou C tem o menor ângulo em relação a A.

(b) Descubra qual dos vetores B ou C tem a menor distância em relação a A.

9) Sendo $\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal β' em relação ao produto interno usual.

10) Sendo $\beta = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal β' em relação ao produto interno usual. [Mantenha a ordem original dos vetores de β de forma que o primeiro vetor de β' seja proporcional a (1, 1, 1).]

11) Em P_2 considere o produto interno de (5a). A partir da base canônica $\xi = \{1, t, t^2\}$, encontre uma base ortogonal utilizando o processo de orgonalização de Gram-Schmidt.

12) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$.

(a) Encontre $S^\perp$ e verifique que ele é um subespaço vetorial de V.

(b) Encontre uma base ortogonal para $S^\perp$.

(c) Se S fosse $[(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)]$, qual seria $S^\perp$? Encontre bases ortogonais para S e $S^\perp$ nesse caso.

13) Sendo $v = (1, 2, 3)$, utilize o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e encontre as coordenadas $[v]_\beta$ e $[v]_{\beta'}$ em relação às bases β e β' do exe. 11.[Qual a vantagem de ter uma base ortonormal?].

14) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $\mathbf{u_1} = (1, -1, 1, 1)$ e $\mathbf{u_2} = (1, 2, 0, 1)$.

a) Determine uma base para o subespaço $U^\perp$.

b) Escreva o vetor $(2, 1, 1, -1)$ como uma soma de dois vetores, sendo um deles pertencente a U e o outro pertencente a $U^\perp$.