Lista 2 - Introdução a Teoria dos Grupos.

1. Sejam H, K subgrupos finitos do grupo G. Mostre que $\frac{|H||K|}{|H \cap K|} = |HK|$.

2. Seja G grupo, H, K subgrupos normais de G tais que $H \cap K = e$. Mostre que $hk = kh$, para todo $h \in H$ e todo $k \in K$.

3. Seja G um grupo, seja H um subgrupo de G e seja K um subgrupo de H. Mostre que K tem índice finito em G se e somente se H tiver índice finito em G e K tiver índice finito em H. Neste caso, mostre que $[G : K] = [G : H][H : K]$.

4. Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. O normalizador de H em G é definido por $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Mostre que:

   (a) $N_G(H)$ é um subgrupo de G;

   (b) H é um subgrupo normal de $N_G(H)$

   (c) se H é um subgrupo normal de um subgrupo K de G então $K \subseteq N_G(H)$

   (d) H é normal em G se e somente se $N_G(H) = G$

5. Seja G um grupo finito e H um subgrupo normal em G tal que $mdc(|H|, [G : H]) = 1$. Prove que H é o único subgrupo de G de ordem igual a $|H|$.

6. Seja G um grupo e seja a um elemento fixado de G. Mostre que a função $\phi : G \to G$, definida por $\phi(x) = axa^{-1}$, para todo $x \in G$ é um isomorfismo de grupos.

7. Seja G grupo, $g \in G$, elemento com ordem n. Seja r inteiro relativamente primo com n. Mostre que a aplicação $g \to g^r$ é um isomorfismo.

8. Se G for um grupo abeliano então todo subgrupo de G é normal em G. A recíproca é verdadeira? Mostre que existem subgrupos não abelianos no qual todos os subgrupos do mesmo são normais.

9. Mostre que o grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é isomorfo ao grupo de números complexos com módulo 1 (sob multiplicação).

10. Seja G um grupo de ordem $2k$ com k ímpar. Mostre que G contém um subgrupo de índice 2. (Sugestão: Tome $a \in G$ com $o(a) = 2$. Use a demonstração do Teorema de Cayley para provar que G contém um elemento que corresponde a uma permutação ímpar.)

11. Seja G grupo de ordem p^2, p primo. Mostre que G é um grupo abeliano.

12. Seja G grupo finito, H subgrupo próprio de G. Prove que $G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.