Lista 3 - Introdução a Teoria dos Grupos.

1. Sejam H, K subgrupos do grupo G. Mostre que $H \cup K$ é subgrupo de G se e somente se $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

2. Mostre que se G é um grupo com exatamente três subgrupos então G é cíclico. (Mostre que G é um grupo com exatamente três subgrupos se e somente se G é cíclico e $|G| = p^2$, p primo)

3. Mostre que se G é um grupo com exatamente dois subgrupos próprios não triviais. Então G é um grupo cíclico de ordem pq (p, q primos distintos) ou G é um grupo cíclico de ordem p^3 (p primo).

4. Seja G grupo, H, K subgrupos de G, $H \leq K \leq G$. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras. Caso contrário apresente contra exemplo

   (a) $H \triangleleft G \Rightarrow H \triangleleft K$.

   (b) $H \triangleleft K \Rightarrow H \triangleleft G$.

   (c) $H \triangleleft K$ e $K \triangleleft G \Rightarrow H \triangleleft G$.

5. Um subgrupo H de um grupo G é um subgrupo característico de G se H é estável por todos os automorfismos de G, isto é, $\phi(H) \subseteq H, \forall \phi \in Aut(G)$. Mostre que se H é um subgrupo característico do grupo K e $K \triangleleft G$ então $H \triangleleft G$.

6. Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Mostre que $[H : H \cap K] \leq [G : K]$. Se $[G : K]$ é finito, então mostre que $[H : H \cap K] = [G : K]$ se, e somente se $G = KH$.

7. (a) Sejam H, K subgrupos de índice finito do grupo G. Mostre que
   $$[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K].$$
   Conclua que nas condições da questão $H \cap K$ possui índice finito em G. Dê exemplos de grupos onde a igualdade é obtida e exemplos onde a desigualdade é estrita.

   (b) Sejam H, K subgrupos de índice finito do grupo G. Mostre que
   $$[G : H \cap K] = [G : H][G : K] \Leftrightarrow G = HK.$$

8. Considere o $r-$ciclo $c = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r)$. definimos o suporte de c, denotado $supp(c)$, como o conjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$

   (a) Considere o $r-$ciclo $c = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r)$. Mostre que c possui ordem r.

   (b) Prove que os ciclos $c = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r)$ e $d = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_s)$ comutam se e somente se $supp(c) \cap supp(d) = \emptyset$.

   (c) Prove que se a permutação $\sigma \in S_n$ se decompõe como produto de ciclos disjuntos $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t$ de comprimentos $r_1, r_2, \cdots, r_t$, respectivamente, então a ordem de σ é igual a $mmc\{r_1, r_2, \cdots, r_t\}$.

9. Determine um elemento de máxima ordem em S_5 e em S_{10}.

10. Considere $c = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r)$. Mostre que c pode ser expresso como um produto de $r-1$ transposições. Conclua que S_n é gerado pelas transposições.

11. Mostre que:

    (a) $S_n =< \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), \cdots, (1\ n)\} >$

    (b) $S_n =< \{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), \cdots, (n-1\ n)\} >$.

    (c) $S_n =< \{(1\ 2), (1\ 2\ 3 \cdots \ n)\} >$

12. Seja $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. Mostre que A_n é gerado pelos $3-$ciclos.

13. Mostre que $A_n =< \{(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 4),\cdots,(1\ 2\ n)\} >$.

14. Determine os subgrupos de A_4. Quais são os subgrupos normais de A_4? Analogamente para S_4.

15. Mostre que A_4 não possui subgrupo de ordem 6 (Logo a recíproca do Teorema de Lagrange não vale).