Lista 4 - Introdução a Teoria dos Grupos.

1. Seja H subgrupo de S_n. Mostre que $H \subseteq A_n$ ou $[H : H \cap A_n] = 2$.

2. Seja n inteiro, $n \geq 2$. Considere D_{2n} o grupo dihedral de ordem $2n$, definido como $D_{2n} =< r, s \mid r^n = e, s^2 = e, rs = sr^{n-1} >$. Mostre que D_{2n} é isomorfo ao subgrupo de S_n gerado pelas permutações

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Verifique-se as permutações

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

são conjugadas em S_n. Elas são conjugadas em A_n? Em caso afirmativo, encontre uma permutação α tal que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \tau$.

4. Mostre que se $n \geq 5$, todos os $3-$ciclos são conjugados em A_n.

5. Prove que se $n \geq 5$ então A_n é um grupo simples. Para isso, seja $\{id\} \neq H \lhd A_n$. Se H contém um $3-$ciclo então H contém todos os $3-$ciclos, pois os $3-$ciclos são todos conjugados em A_n (se $n \geq 5$) e A_n é gerado pelos $3-$ciclos. O objetivo é então mostrar que H contém um $3-$ciclo. Seja então $id \neq \sigma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r \in H$, a decomposição de σ como produto de ciclos disjuntos. Preencha os detalhes do seguinte esboço de demonstração.

   (a) Suponha que $\gamma_1 = (a_1a_2\cdots a_m), m \geq 4$. Seja $\alpha = (a_1a_2a_3) \in A_n$. Calcule $\tau = \alpha\sigma\alpha^{-1}$. Usando que $\tau\sigma^{-1} \in H$, mostre que H contém um $3-$ciclo.

   (b) Suponha então que $\sigma = (123)(456)\gamma_3\cdots\gamma_r$, onde os $\gamma_i, i \geq 3$, são ciclos de comprimento menor ou igual a 3. Calcule $\alpha\sigma\alpha^{-1}\sigma^{-1}$ com $\alpha = (234)$. Conclua que nesse caso H também contém um $3-$ciclo.

   (c) Suponha agora que $\sigma = (123)\tau$, onde τ é um produto de transposições disjuntas (ou τ é a identidade). Mostre que σ^2 é um $3-$ciclo.

(d) Ainda não usamos que $n \geq 5$. Só aqui vamos usar esse fato! Suponha agora que $\sigma = (12)(34)\tau$, onde τ é um produto de transposições disjuntas (ou τ é a identidade). Seja $\alpha = (234)$ e calcule $\gamma = \alpha\sigma\alpha^{-1}\sigma^{-1}$. Seja $\beta = (145) \in A_n$. Calcule $\beta\gamma\beta^{-1}\gamma^{-1}$.

6. Mostre que se $n = 3$ ou $n \geq 5$, o único subgrupo normal próprio de S_n é A_n. Prove que os únicos subgrupos normais próprios de S_4 são A_4 e $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

7. Prove que o grupo abeliano $(\mathbb{Q}, +)$ não é produto direto de dois subgrupos não triviais.

8. Prove que o grupo abeliano $(\mathbb{Q}, +)$ não é finitamente gerado.

9. Seja G um grupo com um subgrupo próprio H (isto é, $H \neq e$ e $H \neq G$) de índice r. Prove que:

   (a) Se G é simples então $|G| \mid r!$.

   (b) Se $r = 2, 3$ ou 4, então G não é simples.

   (c) Existe um grupo não abeliano simples com um subgrupo H de índice 5.

10. Seja p o menor primo que divide a ordem do grupo finito G. Prove que se H é um subgrupo de G com $[G : H] = p$, então $H \triangleleft G$.

11. Seja G um grupo de ordem p^3 onde p é um número primo. Mostre que se G não é abeliano então seu centro $\mathcal{Z}(G) = G'$, o grupo dos comutadores de G.

12. Seja G um grupo de ordem p^k onde p é um número primo e $k > 0$. Mostre que se H é um subgrupo de ordem p^{k-1} então H é normal em G.

13. Seja G um $p-$grupo finito, onde p é um primo positivo. Seja H um subgrupo normal de G tal que $H \neq e$. Mostre que $H \cap \mathcal{Z}(G) \neq e$.

14. Encontre os subgrupos de Sylow de S_3 e de S_4.

15. Seja G um grupo finito e seja $H \triangleleft G$. Seja P um $p-$subgrupo de Sylow de G tal que $P \triangleleft H$. Mostre que $P \triangleleft G$.

16. Mostre que nenhum grupo de ordem 200 é simples.

17. Se G é um grupo de ordem 231, prove que o $11-$subgrupo de Sylow de G está contido no centro de G.

18. Seja G um grupo de ordem $2^n \cdot 3$, com $n \geq 2$. Mostre que G possui um subgrupo normal de ordem 2^n ou 2^{n-1}.

19. Seja G um grupo de ordem $108 = 2^2 \cdot 3^3$. Mostre que G contém um subgrupo normal de ordem 9 ou 27.

20. Seja G um grupo de ordem pqr, onde $p < q < r$, p, q, r primos distintos.

    (a) Mostre que G não é um grupo simples.

    (b) Mostre que G possui um único subgrupo de ordem r.

21. Seja G um grupo de ordem $2p$, p primo ímpar. Prove que G é cíclico ou é isomorfo ao grupo dihedral D_{2p}.

22. Seja G um grupo finito, seja P um subgrupo de Sylow de G e seja N um subgrupo normal de G. Mostre que

    (a) $P \cap N$ é um subgrupo de Sylow de N;

    (b) PN/N é um subgrupo de Sylow de G/N.

23. Seja G um grupo de ordem pq, onde $p < q$ são números primos.

    (a) Mostre que o $q-$subgrupo de Sylow de G é normal em G.

    (b) Mostre que se p não divide $q - 1$ então G é um grupo cíclico.

    (c) Mostre que se p divide $q - 1$ então existe exatamente um grupo não abeliano de ordem pq.

    (d) Mostre que se G não é abeliano então G é isomorfo a um subgrupo de S_q.

24. Mostre que todo grupo de ordem 45 é abeliano.

25. Prove que nenhum grupo de ordem menor que 60 é simples, exceto os cíclicos de ordem prima.

26. Prove que todo grupo de ordem 99 é abeliano.

27. Prove que não existem grupos simples de ordem 616.

28. Seja G um grupo de ordem pq, $p < q$ primos distintos. Prove que G é um grupo abeliano ou $\mathcal{Z}(G) = \{e\}$.

29. Seja G um grupo de ordem p^2q^2, com p e q primos e $p > q$. Prove que G tem um subgrupo normal de ordem p ou de ordem p^2.